Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Beispiele.

(4) Transformation in Kugelkoordinaten (oder sphärische Koordinaten) **8/1/35/5**

Wir transformieren hierbei wieder räumliche Koordinaten.
Dazu sei $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0) := \bar{0}$ ein Punkt in dem Raum $\mathbb{R}^3$, der mit dem kartesischen Koordinatensystem aus Beispiel (3) versehen ist.
Der Punkt (a, b, c) wird erneut durch ein Koordinatentripel (r, φ, ϑ) beschrieben, deren Bedeutung aus der Abbildung 8.10 hervorgeht.

r gibt den Abstand zwischen $\bar{0}$ und P an.
$P' := (a, b, 0)$ ist die Projektion von P auf die (x, y)-Ebene, und φ bezeichnet den Winkel, der durch die x-Achse und die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $\bar{0}$ und P' aufgespannt wird.

Offenbar ist dann

$$c = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad r' = r \cos \vartheta, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$a = r' \cdot \cos \varphi = r \cos \varphi \cos \vartheta := g_1(r, \varphi, \vartheta),$$

$$b = r' \cdot \sin \varphi = r \sin \varphi \cos \vartheta := g_2(r, \varphi, \vartheta),$$

$$c = r \sin \vartheta := g_3(r, \varphi, \vartheta).$$

Die neuen Koordinaten r, φ, ϑ heißen *Kugelkoordinaten* oder auch *sphärische Koordinaten.*

(Die Punkte auf der z-Achse sind analog wie im vorhergehenden Beispiel mit Hilfe der Kugelkoordinaten nicht eindeutig darstellbar.)

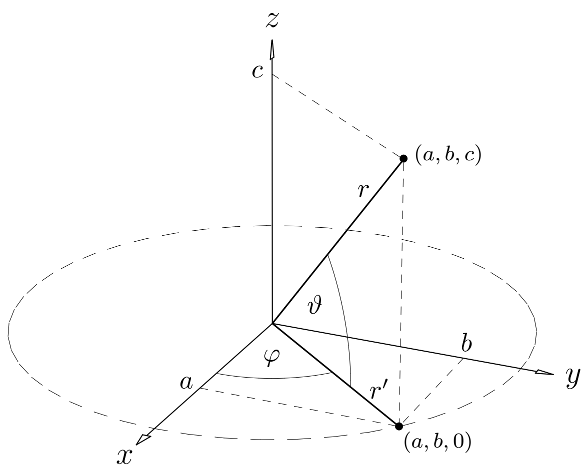

Abb. 8.10 Der Punkt $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ist mit Hilfe von Kugelkoordinaten dargestellt. r' und r bezeichnen die Abstände von $\bar{0} := (0,0,0)$ und $(a,b,0)$ bzw. von $\bar{0}$ und (a,b,c).
ϑ ist der Winkel zwischen der (x,y)-Ebene und der durch die Punkte $\bar{0}$ und (a,b,c) verlaufenden Geraden.
Der Punkt (a,b,c) besitzt die Kugelkoordinaten (r,φ,ϑ).

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a,b,c) := (x,y,z)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r,\varphi,\vartheta) := \Big(g_1(r,\varphi,\vartheta), g_2(r,\varphi,\vartheta), g_3(r,\varphi,\vartheta)\Big) = (x,y,z),$$

also

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \;\; 0 \le r < \infty \quad \text{und} \quad \frac{-\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Die Ableitung der Funktion g ergibt sich wie folgt:

$$g'(r,\varphi,\vartheta) = \frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}(r,\varphi,\vartheta) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\vartheta & -r\sin\varphi \cdot \cos\vartheta & -r\cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \sin\varphi \cdot \cos\vartheta & r\cos\varphi \cdot \cos\vartheta & -r\sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det\left(\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)\right) = r^2\cos\vartheta,$$

also

$$\det\left(\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)\right) \ne 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r \ne 0 \quad \text{und} \quad \vartheta \ne \pm\frac{\pi}{2}.$$

Für alle Punkte, die nicht auf der z-Achse liegen, ist die Transformation injektiv.