

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Beispiele.

(1) Spezialfall einer Verkettung

8/1/35/1

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, also $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $g := (g_1, g_2)$.
Speziell sei $g_1(t) := t$, $g_2(t) := t^2$, also $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (t, t^2) (\in \mathbb{R}^2)$ und
 $f(x, y) := \sin(x \cdot y)$.

Für $x = g_1(t)$ und $y = g_2(t)$ erhält man

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t)) = \sin(t \cdot t^2) = \sin t^3.$$

Offenbar ist $f \circ g$ eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, folglich läßt sich die Ableitung nach den Regeln für Funktionen einer Veränderlichen bilden:

$$(f \circ g)'(t) = (\cos t^3) \cdot 3t^2.$$

Wir werden jetzt die Ableitung nach den Regeln für Funktionen mehrerer Veränderlicher berechnen; es wird sich zeigen, daß das gleiche Ergebnis entsteht.

Es ist

$$f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right),$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) := (\star).$$

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) = \cos(g_1(t) \cdot g_2(t)) \cdot g_2(t) = (\cos t^3) \cdot t^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) = \cos(g_1(t) \cdot g_2(t)) \cdot g_1(t) = (\cos t^3) \cdot t,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t}(t) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) = 2t.$$

Dann ist

$$(f \circ g)'(t) = (\star) = (\cos t^3) \cdot t^2 \cdot 1 + (\cos t^3) \cdot t \cdot 2t = (\cos t^3) \cdot 3t^2.$$

(2) Transformation in Polarkoordinaten

8/1/35/2

Bei der Lösung mathematischer Probleme, insbesondere in der Physik, der Technik und den Naturwissenschaften überhaupt, ist es oft vorteilhaft, die zu behandelnden Probleme mit Hilfe besonders geeigneter Koordinatensysteme zu beschreiben oder vom kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen überzugehen. Da dieser Übergang häufig mit der Verkettung von Funktionen und die Lösung der anstehenden Probleme oft mit der Differenzierbarkeit der Verkettung verbunden ist, wollen wir hier einige wichtige nicht-kartesische Koordinatensysteme behandeln. Zunächst betrachten wir die sog. *Polarkoordinaten*, die schon bei der Behandlung der trigonometrischen Funktionen in Kapitel 5 (vgl. Abb. 5.21) eine gewisse Rolle spielten.

Es sei $P = (a, b) \neq (0, 0)$ ein Punkt in der euklidischen Ebene, die mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, dessen Achsen mit x bzw. y bezeichnet werden. Offenbar läßt sich der Punkt (a, b) auch eindeutig durch das Paar (r, φ) beschreiben, wobei r der Abstand von (a, b) zum Nullpunkt ist und φ den Winkel zwischen der x -Achse und der Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ nach (a, b) angibt (φ in Bogenmaß gemessen). Damit ist der gleiche Punkt P in der Ebene \mathbb{R}^2 durch unterschiedliche Koordinatensysteme eindeutig beschrieben worden (vgl. Abb. 8.7).

a, b sind die kartesischen Koordinaten von P , und r, φ heißen *Polarkoordinaten*.

(Der Nullpunkt ist mit Hilfe der Polarkoordinaten nicht eindeutig darstellbar, da der Winkel φ hierfür beliebig sein könnte.)

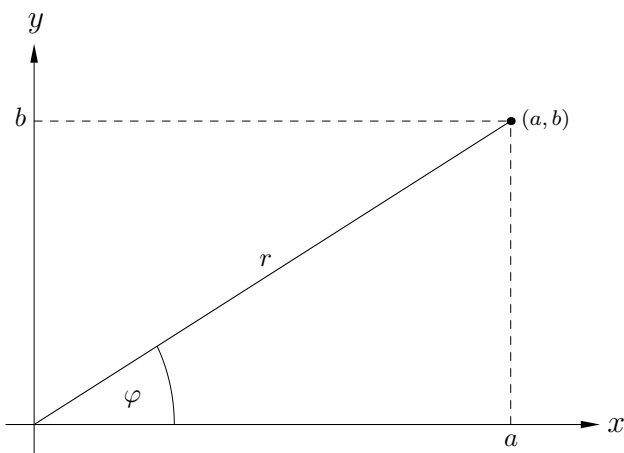


Abb. 8.7 Der Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist mit Hilfe von Polarkoordinaten dargestellt. r bezeichnet den Abstand zwischen $(0, 0)$ und (a, b) .

Nach Voraussetzung gilt also

$$a = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi)$$

und

$$b = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi).$$

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a, b) := (x, y)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi) := (g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = (x, y),$$

also

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq r < \infty.$$

Wir betrachten jetzt ein Beispiel einer Funktion in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x, y) = x^2 + y^2$, wobei der Definitionsbereich von f ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und dem Radius R sein soll, also $D(f) := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Wir stellen jetzt f in Polarkoordinaten dar. Für

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

und

$$x = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi), \quad y = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi)$$

ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = (g_1(r, \varphi))^2 + (g_2(r, \varphi))^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} = r^2. \end{aligned}$$

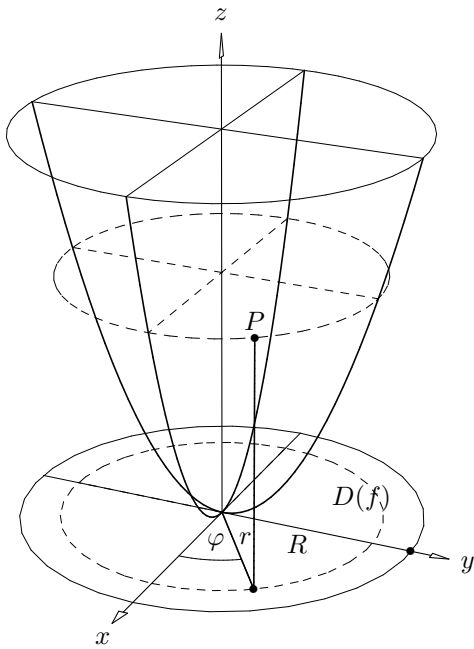


Abb. 8.8 a

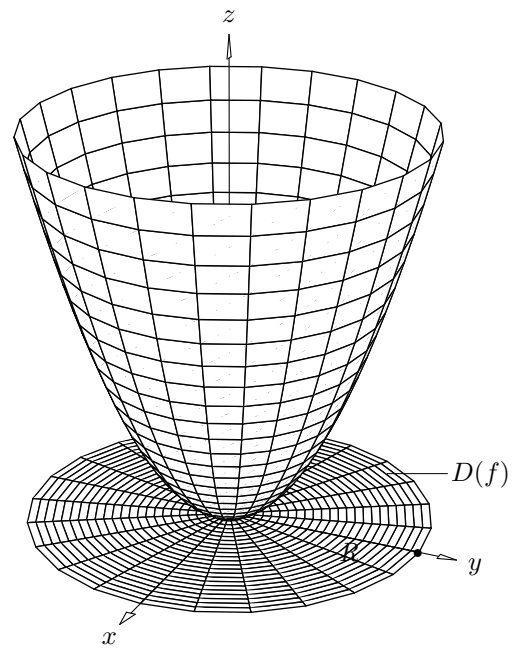


Abb. 8.8 b

In der Abb. 8.8 a ist der Punkt $P = (x, y, f(x, y))$ mit Hilfe von Polarkoordinaten dargestellt. In diesem Koordinatensystem ist P durch (r, φ, r^2) gegeben.

Abb. 8.8 b verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Definitionsbereich und Graph der Funktion $z = f(x, y)$ in Polarkoordinaten. In beiden Fällen wurde als Definitionsbereich ein Kreis mit dem Radius R gewählt.

Man vergleiche auch Abb. 8.5, in der dieselbe Funktion dargestellt wird, wobei jedoch der Definitionsbereich ein Rechteck ist.

Insgesamt haben wir

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \implies f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Also

$$(f \circ g)(r, \varphi) = f(g(r, \varphi)) = f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = r^2.$$

Die Ableitung der verketteten Funktion ergibt sich wie folgt:

$$(f \circ g)'(r, \varphi) = f'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi),$$

$$f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = (2x, 2y),$$

$$g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} (r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(r, \varphi) &= f'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi) = \\(2r \cos \varphi, 2r \sin \varphi) &\cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = \\(2r \cos \varphi \cdot \cos \varphi + 2r \sin \varphi \cdot \sin \varphi, &-2r \sin \varphi \cdot r \sin \varphi + 2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi) = \\(2r, 0). &\end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt die Determinante der Funktionalmatrix von $g(r, \varphi)$.

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Bemerkung. (ohne Beweis)

8/1/35/3

Sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $g(\bar{x}) = g(x_1, \dots, x_n)$, und $g := (g_1, \dots, g_n)$.

Ist die Determinante der Funktionalmatrix von g in einer Umgebung $U(\bar{c})$ von null verschieden, also

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{x}) \right) \neq 0 \quad \text{für alle } \bar{x} \in U(\bar{c}),$$

dann besitzt g in $U(\bar{c})$ eine Umkehrfunktion.

Speziell für unsere Transformationsfunktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) \right) \neq 0 \quad \iff \quad r \neq 0.$$

Die Koordinatentransformation ist demnach außer im Punkt $(0, 0)$ injektiv.

(3) Transformation in Zylinderkoordinaten

8/1/35/4

Analog wie im Beispiel (2) werden jetzt räumliche Koordinaten transformiert.

Dazu sei $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ein Punkt im Raum \mathbb{R}^3 , der mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, dessen Achsen mit x , y bzw. z bezeichnet werden. Dann ist der Punkt (a, b, c) eindeutig durch das Tripel (r, φ, c) darstellbar, wobei r und φ die Polarkoordinaten des Punktes (a, b) in der Ebene \mathbb{R}^2 sind und c bei der Transformation unverändert bleibt.

Damit ist der gleiche Punkt P im Raum \mathbb{R}^3 durch unterschiedliche Koordinatensysteme eindeutig beschrieben worden (vgl. Abb. 8.9).

Die neuen Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten*.

(Der Nullpunkt ist analog wie im vorhergehenden Beispiel mit Hilfe der Zylinderkoordinaten nicht eindeutig darstellbar.)

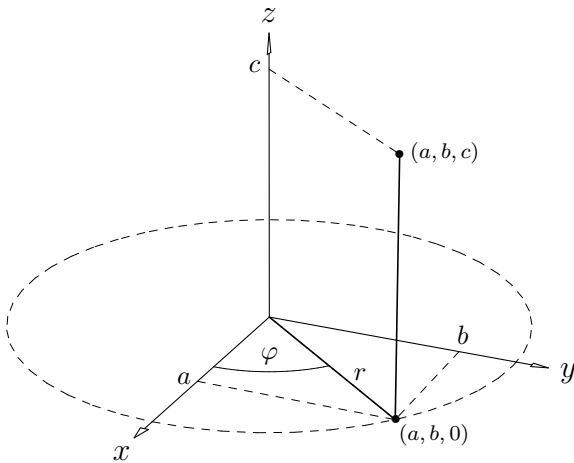


Abb. 8.9 Der Punkt $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist mit Hilfe von Zylinderkoordinaten dargestellt. r bezeichnet den Abstand zwischen $\bar{0} := (0, 0, 0)$ und $(a, b, 0)$.

Der Punkt (a, b, c) besitzt die Zylinderkoordinaten (r, φ, c) , wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von (a, b) sind und c unverändert bleibt.

Es gilt also

$$a = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi, z),$$

$$b = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi, z),$$

$$c = c.$$

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a, b, c) := (x, y, z)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi, z) := (g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), g_3(r, \varphi, z)) = (x, y, z),$$

also

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung der Funktion g ergibt sich wie folgt:

$$g'(r, \varphi, z) = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)}(r, \varphi, z) \right) = r.$$

Für $r \neq 0$ ist die Transformation injektiv.

(4) Transformation in Kugelkoordinaten (oder sphärische Koordinaten)

Wir transformieren hierbei wieder räumliche Koordinaten.

Dazu sei $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0) := \bar{0}$ ein Punkt in dem Raum \mathbb{R}^3 , der mit dem kartesischen Koordinatensystem aus Beispiel (3) versehen ist.

Der Punkt (a, b, c) wird erneut durch ein Koordinatentripel (r, φ, ϑ) beschrieben, deren Bedeutung aus der Abbildung 8.10 hervorgeht.

r gibt den Abstand zwischen $\bar{0}$ und P an.

$P' := (a, b, 0)$ ist die Projektion von P auf die (x, y) -Ebene, und φ bezeichnet den Winkel, der durch die x -Achse und die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $\bar{0}$ und P' aufgespannt wird.

Offenbar ist dann

$$c = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad r' = r \cos \vartheta, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$a = r' \cdot \cos \varphi = r \cos \varphi \cos \vartheta := g_1(r, \varphi, \vartheta),$$

$$b = r' \cdot \sin \varphi = r \sin \varphi \cos \vartheta := g_2(r, \varphi, \vartheta),$$

$$c = r \sin \vartheta := g_3(r, \varphi, \vartheta).$$

Die neuen Koordinaten r, φ, ϑ heißen *Kugelkoordinaten* oder auch *sphärische Koordinaten*.

(Die Punkte auf der z -Achse sind analog wie im vorhergehenden Beispiel mit Hilfe der Kugelkoordinaten nicht eindeutig darstellbar.)

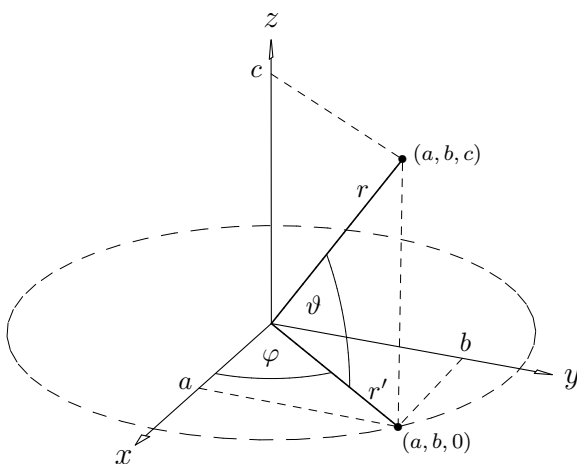


Abb. 8.10 Der Punkt $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist mit Hilfe von Kugelkoordinaten dargestellt. r' und r bezeichnen die Abstände von $\bar{0} := (0, 0, 0)$ und $(a, b, 0)$ bzw. von $\bar{0}$ und (a, b, c) .

ϑ ist der Winkel zwischen der (x, y) -Ebene und der durch die Punkte $\bar{0}$ und (a, b, c) verlaufenden Geraden.

Der Punkt (a, b, c) besitzt die Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) .

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a, b, c) := (x, y, z)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi, \vartheta) := (g_1(r, \varphi, \vartheta), g_2(r, \varphi, \vartheta), g_3(r, \varphi, \vartheta)) = (x, y, z),$$

also

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty \quad \text{und} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die Ableitung der Funktion g ergibt sich wie folgt:

$$g'(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} (r, \varphi, \vartheta) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cdot \cos \vartheta & -r \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cdot \cos \vartheta & r \cos \varphi \cdot \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) \right) = r^2 \cos \vartheta,$$

also

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) \right) \neq 0 \quad \iff \quad r \neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta \neq \pm \frac{\pi}{2}.$$

Für alle Punkte, die nicht auf der z -Achse liegen, ist die Transformation injektiv.