Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Satz 8.9 (*Satz von Schwarz*) 8/2/2

Es sei $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *und* $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$.
Ist f *in einer Umgebung* $U(\bar{c})$ *definiert und existieren in* $U(\bar{c})$ *die partiellen Ableitungen* f_x, f_y, f_{xy} *und ist* f_{xy} *in* $\bar{c}$ *stetig, dann existiert auch* f_{yx} *in* $\bar{c}$*, und es ist* $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$.
(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in $\bar{c}$ gleich.)

Beweis. Es sei $\bar{c} = (a,b)$ und $\bar{x} = (x,y)$. 8/2/3

Wir zeigen, daß $f_{yx}(a,b) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_y(x,b) - f_y(a,b)}{x-a}$ existiert und gleich $f_{xy}(a,b)$ ist.

Nach Voraussetzung ist f in $U(\bar{c})$ partiell nach x differenzierbar. Folglich läßt sich auf f (bei festgehaltenem y) der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung bezüglich x anwenden. Damit erhält man für alle $(x,y) \in U(\bar{c})$ und $x \neq a,\ y \neq b$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x-a}\cdot\Big(f_y(x,b) - f_y(a,b)\Big) \\
&\quad= \frac{1}{x-a}\cdot\left(\lim_{y\to b}\frac{1}{y-b}\cdot\Big(\underbrace{f(x,y)-f(x,b)}_{:=\,g(x,y)}\Big) - \lim_{y\to b}\frac{1}{y-b}\cdot\Big(\underbrace{f(a,y)-f(a,b)}_{=\,g(a,y)}\Big)\right) \\
&\quad= \frac{1}{x-a}\cdot\lim_{y\to b}\frac{1}{y-b}\cdot\Big(g(x,y)-g(a,y)\Big) \\
&\quad= \lim_{y\to b}\frac{1}{y-b}\cdot\frac{g(x,y)-g(a,y)}{x-a} \\
&\quad= \lim_{y\to b}\frac{1}{y-b}\cdot g_x(\underbrace{a+\vartheta(x-a)}_{:=\,u},y) && \text{(1. Mittelwertsatz, } y \text{ fest, } 0<\vartheta<1) \\
&\quad= \lim_{y\to b}\frac{1}{y-b}\cdot\Big(f_x(u,y)-f_x(u,b)\Big) \\
&\quad= f_{xy}(u,b). && (f_{xy} \text{ existiert in } U(\bar{c}))
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung f_{xy} in $\bar{c}$ stetig ist, existieren die folgenden Limites und es gilt:

$$f_{yx}(a,b) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\Big(f_y(x,b)-f_y(a,b)\Big) = \lim_{x\to a} f_{xy}(u,b) = f_{xy}(a,b). \qquad ❏$$