Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, wobei **8/3/7**

$$f(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x} \quad \text{und} \quad D(f) = \{(x,y) : x \neq 0,\ y \neq 0\}.$$

Folglich ist f in den Gebieten

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}, \\ M_2 &:= \{(x,y) : x > 0,\ y < 0\}, \\ M_3 &:= \{(x,y) : x < 0,\ y > 0\}, \\ M_4 &:= \{(x,y) : x < 0,\ y < 0\} \end{aligned}$$

definiert und offenbar differenzierbar. In jedem der Gebiete gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\Big(\frac{1}{y}\Big) + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) \\ &= \frac{y^2}{(y^2+x^2)\cdot y} - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\cdot x^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\Big(-\frac{x}{y^2}\Big) + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0.$$

Folglich ist $f'(\bar{x}) = 0$, und damit ist f in jedem der M_i konstant. Die Werte von f kann man leicht durch geeignete spezielle Argumente ermitteln.

In M_1 ist $f(x,y) = f(1,1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$,
in M_2 ist $f(x,y) = f(1,-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$,
in M_3 ist $f(x,y) = f(-1,1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$,
in M_4 ist $f(x,y) = f(-1,-1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.