

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 8.12 (Satz von Taylor für Funktionen mit n Veränderlichen)

8/3/11

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von \bar{c} und $f \in C^{m+1}(U)$. Sei $\bar{x} \in U$, so daß die Verbindungsstrecke von \bar{c} und \bar{x} ganz zu U gehört. Für $\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) := (h_1, \dots, h_n) = \bar{h}$ gilt dann: Es gibt ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß $f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c}) + R_m(\bar{x})$, wobei

$$R_m(\bar{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \cdot (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

Beweis. Sei $\varphi(t) := f(\bar{c} + t\bar{h})$, $0 \leq t \leq 1$. Dann ist $\varphi(t)$ als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen offenbar $(m+1)$ -mal differenzierbar. Nach dem Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

8/3/12

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1-0)^i + \frac{\varphi^{(m+1)}(0 + \vartheta(1-0))}{(m+1)!} \cdot (1-0)^{m+1} \\ &= \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\varphi(1) = f(\bar{x}), \quad \varphi(0) = f(\bar{c}), \quad \varphi^{(i)}(0) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c})$$

für $i = 1, \dots, m$ und

$$\varphi^{(m+1)}(\vartheta) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square