Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Beispiel. Sei $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$ und $\bar{a} = (a, b) = (0, 0)$. **8/3/15**
Dann ist $D_1 f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$ und $D_2 f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$. Folglich ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar und es ist $D_i^k D_j^m f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$ und somit insbesondere $D_i^k D_j^m f(0, 0) = 1$ für $i, j \in \{1, 2\}$.

Wegen $h_1 = x - 0 = x$, $h_2 = y - 0 = y$ und $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(m)} f(0, 0) = (x + y)^m$ gilt

$$\mathrm{e}^{x+y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (x + y)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i y^{m-i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j=m}^{m} \frac{1}{i!j!} \cdot x^i y^j .$$

(Man hätte diese Reihe natürlich auch anders gewinnen können.)