

Kapitel 8 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 8.13 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums) 8/3/18

Sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von \bar{c} definiert und in \bar{c} nach allen Variablen partiell differenzierbar.

Besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, dann sind alle (ersten) partiellen Ableitungen von f in \bar{c} null.

(Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$ für $i = 1, \dots, n$, also $\text{grad}f(\bar{c}) = \bar{0}$, dann heißt \bar{c} auch *kritischer* oder *stationärer Punkt* von f .)

Beweis. Habe o.B.d.A. f in \bar{c} ein lokales Minimum (für ein lokales Maximum verläuft der Beweis analog). 8/3/19

Dann gibt es eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ mit $\bar{x} \neq \bar{c}$ gilt: $f(\bar{x}) > f(\bar{c})$. Dies gilt insbesondere für $\bar{x} := \bar{c} + h\bar{e}_i$, wenn h hinreichend klein ist.

Nach Voraussetzung ist die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h\bar{e}_i)$ (als Funktion von h) in $h = 0$ differenzierbar, und es ist $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{c})$.

Offenbar besitzt φ (als Funktion einer Veränderlichen) in 0 ein lokales Minimum. Folglich gilt nach Satz 7.15:

$$\varphi'(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad \square$$