

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Im eindimensionalen Fall haben wir eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums mit Hilfe des Taylorschen Satzes bewiesen. Analoge Überlegungen führen auch bei Funktionen mit mehreren Veränderlichen zum Ziel. Wir beschränken uns hier auf Funktionen mit zwei Veränderlichen, da der technische Aufwand für den n -dimensionalen Fall nicht unerheblich ist. 8/3/21

Ist $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, U eine Umgebung von $\bar{c} = (a, b)$, f zweimal stetig differenzierbar in U und $\bar{x} = (x, y)$ hinreichend dicht bei \bar{c} , dann gilt nach dem Satz von Taylor (für $m = 1$, $n = 2$, $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a} = (x - a, y - b) := (h, k)$ und $\bar{u} := \bar{a} + \vartheta \bar{h}$)

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = f_x(\bar{c}) \cdot h + f_y(\bar{c}) \cdot k + \frac{1}{2} (f_{xx}(\bar{u}) \cdot h^2 + 2f_{xy}(\bar{u}) \cdot hk + f_{yy}(\bar{u}) \cdot k^2). \quad (\star)$$

Sind die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums erfüllt, d.h., $f_x(\bar{c}) = f_y(\bar{c}) = 0$, dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} (h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{u}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u})) = R_1(\bar{x}).$$

Ob f an der Stelle \bar{c} ein lokales Extremum besitzt, hängt allein von dem Restglied ab. Aufgrund der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen in U wechseln diese in einer hinreichend kleinen Umgebung von \bar{c} ihr Vorzeichen nicht, falls sie an der Stelle \bar{c} von null verschieden sind. Dies nutzen wir aus, um ein handhabbares Kriterium zur Verfügung zu haben.