

Kapitel 8 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 8.14 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums) 8/3/22

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ und f sei in einer Umgebung von \bar{c} zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei \bar{c} ein kritischer Punkt von f und $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$.

Dann gilt:

- (1) Ist $D > 0$, dann besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, falls $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ und ein lokales Maximum, falls $f_{xx}(\bar{c}) < 0$.
- (2) Ist $D < 0$, dann besitzt f in \bar{c} einen sog. Sattelpunkt (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist $D = 0$, dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) noch keine Aussage treffen.

Beweis. Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in der obigen Formel (\star). Da 8/3/23 nach Voraussetzung $f_x(\bar{c})$ und $f_y(\bar{c})$ null sind, erhält man aus (\star)

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} (h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{c}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u})) = R_1(\bar{x}).$$

(1). Nach Voraussetzung ist

$$D := D(\bar{c}) = f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) > 0.$$

Betrachtet man $D(\bar{u})$ als Funktion von $\bar{u} = \bar{c} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$, dann ist wegen $f \in C^2(U)$ die Funktion $D(\bar{u})$ in U stetig und somit $D(\bar{u}) > 0$, falls \bar{x} hinreichend nahe bei \bar{c} liegt.

Analog gilt für $f_{xx}(\bar{c}) \lesssim 0$ auch $f_{xx}(\bar{u}) \lesssim 0$.

Im folgenden schreiben wir für $f_{xx}(\bar{u})$, $f_{xy}(\bar{u})$, $f_{yy}(\bar{u})$ kurz f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} .

Da f_{xx} nicht null ist, erhält man

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= \frac{1}{2f_{xx}} \cdot [h^2 f_{xx}^2 + hk f_{xx} f_{xy} + k^2 f_{xx} f_{yy}] \\ &= \frac{1}{2f_{xx}} \left[\underbrace{(h f_{xx} + k f_{yy})^2}_{\geq 0} + k^2 \underbrace{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}_{> 0} \right]. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in den eckigen Klammern für $k \neq 0$ positiv ist, hängt das Vorzeichen von $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ nur von $f_{xx}(\bar{c})$ ab. (Für $k = 0$ gilt nach (\star) schon $f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}$.) Also für $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ besitzt f an der Stelle \bar{c} ein lokales Minimum und für $f_{xx}(\bar{c}) < 0$ ein lokales Maximum.

(2). Sei $D < 0$. Setzt man $h = k$ bzw. $h = -k$, dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) \quad \text{bzw.}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy}).$$

Es sei zunächst $f_{xx}(\bar{c}) = f_{yy}(\bar{c}) = 0$.

Wegen $D(\bar{c}) < 0$ ist dann $f_{xy}(\bar{c}) \neq 0$ und somit

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 2f_{xy}(\bar{c}), \quad \text{falls } h = k \quad \text{und}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} -2f_{xy}(\bar{c}), \quad \text{falls } h = -k.$$

Dies bedeutet, daß in jeder Umgebung von \bar{c} sowohl positive als auch negative Werte von $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ auftreten. Folglich besitzt f in \bar{c} kein lokales Extremum.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$ oder $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$.

Sei o.B.d.A. $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$. Dann erhält man für $k = 0$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}.$$

Für hinreichend nahe bei \bar{c} gelegene \bar{x} haben $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ und $f_{xx}(\bar{c})$ das gleiche Vorzeichen.

Sei jetzt $h = -s \cdot f_{xy}(\bar{c})$ und $k = s \cdot f_{xx}(\bar{c})$ für „kleine“ $s \neq 0$. Dann gilt

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{s^2}{2} \left(f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx} - 2f_{xy}(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{xy} + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy} \right).$$

Wegen $f \in C^2(U)$ gilt

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{s^2}{2} \left(f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) - 2f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) \right) \\ &= \frac{s^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot \underbrace{\left(f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) \right)}_{< 0}. \end{aligned}$$

Folglich haben $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ und $f_{xx}(\bar{c})$ unterschiedliches Vorzeichen, und damit besitzt f in \bar{c} kein lokales Extremum.

Den Fall $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$ beweist man durch ähnliche Überlegungen. \square