Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.4 Implizite Funktionen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der (nicht einfachen Problematik der) Auflösbarkeit **8/4/0**
von Gleichungssystemen. Die lineare Algebra stellt bekanntlich gut nutzbare Werkzeuge für die Auflösung von linearen Gleichungssystemen bereit. Diese Hilfsmittel versagen jedoch im nichtlinearen Fall. Zur Verdeutlichung der Auflösbarkeit solcher Systeme starten wir mit einem linearen Gleichungssystem, das gegeben ist durch

$$A\bar{x} = \bar{b}\ , \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem ist bekanntlich genau dann lösbar (d.h. nach $x_1, \dots, x_n$ auflösbar), wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt. Für den Fall, daß $m = n$ und der Rang von A ebenfalls n ist (d.h. die Determinante $\det A$ von A nicht null ist), läßt sich das Gleichungssystem stets eindeutig lösen. Ist das Gleichungssystem lösbar, $n > m$ und (nach eventueller Umsortierung der Koeffizienten)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0\ ,$$

dann gibt es lineare Funktionen $f_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, f_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$, so daß

$$x_i = f_i(x_{m+1}, \dots, x_n) \ \text{ für } \ i = \ \dots, m.$$

Für $\bar{x} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ erhält man somit

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = f(\bar{x}).$$

Wir befassen uns jetzt mit beliebigen Gleichungssystemen. Dazu betrachten wir zunächst eine Gleichung mit zwei Unbekannten.