Kapitel 8
Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.4 Implizite Funktionen

Korollar. *Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 8.15 noch* **8/4/5**
(4) f *ist in* $U(\bar{c})$ *stetig partiell nach* x *differenzierbar,*
dann ist die durch $f(x,y)=0$ *in* $U_\delta(a)$ *implizit definierte Funktion* g *differenzierbar, und es gilt:* $g'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$.

Beweis. Wir wählen die Bezeichnungen wie im vorhergehenden Beweis. **8/4/6**
Sei $|x-x_0| < \delta'$, $x \neq a$ und $y = g(x)$, dann ist $(x,y) \in U_{\delta'}(x_0) \times U_\varepsilon(b) := D$, und die Verbindungsstrecke zwischen (a,b) und (x,y) gehört ganz zu D. Nach dem Mittelwertsatz für Funktionen mit mehreren Veränderlichen gilt (er kann hier angewendet werden, da $f(x,y)$ nach Voraussetzung differenzierbar ist):

$$\underbrace{f(x,y)}_{=0} - \underbrace{f(a,b)}_{=0} = 0 = (x-a)\cdot f_x(\bar{u}) + (y-b)\cdot f_y(\bar{u}),$$

wobei $\bar{u} = \bar{a} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$, $y = g(x)$ und $b = g(a)$. Hieraus folgt

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -\frac{f_x(\bar{u})}{f_y(\bar{u})} \ .$$

Da g in $U_\delta(a)$ stetig ist, gilt für $x \to a$ auch $y = g(x) \to g(a) = b$ und somit $\bar{u} \to \bar{a}$. Folglich existiert

$$\underbrace{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{=g'(a)} = -\frac{f_x(\bar{c})}{f_y(\bar{c})} \ ,$$

also

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \ . \qquad ❏$$