Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Satz 9.4 (*Substitutionsregel*) **9/1/18**
Sei g *in dem Intervall* I *und* f *in dem Intervall* J *definiert, und es sei* $g(I) \subseteq J$. *Besitzt* f *in* J *eine Stammfunktion und ist* g *in* I *differenzierbar, dann besitzt* $f(g(x)) \cdot g'(x)$ *in* I *eine Stammfunktion, und es gilt*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(g(x))g'(x)\,dx = \int\limits_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \quad \textit{wobei } x_0 \in I,\ t = g(x) \ \textit{ und } \ t_0 = g(x_0).$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$, $t_0 = g(x_0)$ und F die Stammfunktion von f in J, die in **9/1/19**
$t_0 \in J$ Null wird.
Es gilt also $F(t_0) = F(g(x_0)) = 0$ und

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Folglich ist $F(g(x))$ die Stammfunktion von $f(g(x)) \cdot g'(x)$, die in x_0 Null wird, denn $F(g(x_0)) = F(t_0) = 0$. Also ist

$$F(\underbrace{g(x)}_{=t}) = \int\limits_{x_0}^{x} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx,$$

und damit gilt auch

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(t)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx. \qquad ❏$$