

Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Beispiele.

3. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{1}{1+e^x} dx$.

9/1/21/3

Wir versuchen dies wieder mit Hilfe der Substitutionsregel.

Hierzu setzen wir $t = e^x$. Folglich ist $\frac{dt}{dx} = e^x$. Rechnet man mit Differentialen, dann ergibt sich hieraus $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t(1+t)} dt.$$

Der Integrand wird mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* so umgeformt, daß sich die resultierenden Integrale leichter berechnen lassen. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

wobei A und B Konstanten sind und die Gleichheit als Gleichheit von rationalen Funktionen zu verstehen ist. Multipliziert man die Gleichung mit der Nennerfunktion $t(t+1)$, dann erhält man die folgende Polynomgleichheit:

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A.$$

Ein Koeffizientenvergleich der auf beiden Seiten der Gleichheit stehenden Polynome liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A+B &= 0, \end{aligned}$$

mit den Unbekannten A, B . Die Lösung ergibt $B = -A = -1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + c \\ &= \ln e^x - \ln(1+e^x) + c \\ &= x - \ln(1+e^x) + c. \end{aligned}$$