Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Beispiele.

6. Hat man eine beliebige rationale Funktion $f(x)$ in der Form $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ gegeben, dann **9/1/21/6**
kann durch Polynomdivision immer erreicht werden, daß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei der Grad von $r(x)$ kleiner ist als der Grad von $q(x)$.

Für die entsprechende Partialbruchzerlegung von $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ macht man folgenden Ansatz:

$$\frac{r(x)}{(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}} =$$

$$\frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \cdots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}} +$$

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l} + \cdots + \frac{B_{ln_l}x+C_{ln_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}},$$

wobei $q(x)$ schon als Produkt gegeben sei und die Faktoren $x^2+b_ix+c_i$ keine reellen Nullstellen besitzen sollen. Die Multiplikation der Gleichung mit $q(x)$ liefert wieder eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} berechnen kann. Mit dieser Methode bleiben schließlich nur noch Integrale über Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}$$

zu berechnen.
Bei der ersten Funktion substituiert man $t = x - a$, und löst auf diese Weise das Integral.
Bei der zweiten Funktion ist $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2+c-(\frac{b}{2})^2$. Da x^2+bx+c keine reelle Nullstelle besitzt, ist $c-(\frac{b}{2})^2 > 0$. Der Einfachheit wegen setzen wir $c-(\frac{b}{2})^2 := r^2$.
Substituiert man jetzt $t = x + \frac{b}{2}$, so ist $dx = dt$ und $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 + r^2 = t^2 + r^2 = r^2((\frac{t}{r})^2+1)$.
Folglich erhält man

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}\,dx = \int \frac{At+(B-A\cdot\frac{b}{2})}{r^{2l}\left(\left(\frac{t}{r}\right)^2+1\right)^l}\,dt = \frac{1}{r^{2l}}\int \frac{At+C}{\left(\left(\frac{t}{r}\right)^2+1\right)^l}\,dt := (\star),$$

wobei $C := B - A \cdot \frac{b}{2}$.
Substituiert man erneut $u := \frac{t}{r}$, also $t = r \cdot u$ und $dt = r \cdot du$, so ergibt sich

$$(\star) = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{r \cdot Au + C}{(u^2+1)^l} \cdot r du = \frac{1}{r^{2l-2}} \int \frac{Au + C^*}{(u^2+1)^l}\, du, \text{ mit } C^* = \tfrac{c}{r}.$$

Es bleiben schließlich nur noch die Integrale

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^l}\, du \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2+1)^l}$$

zu berechnen.
Bei dem ersten Integral substituiert man $v := u^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad dv = 2u\, du$, also

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^l}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^l},$$

und dies ist ein Grundintegral.
Das zweite Integral ist für $l = 1$ ein Grundintegral; für $l > 1$ führt folgender Ansatz schließlich zum Ziel:

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^l} = \frac{a^*u + b^*}{(u^2+1)^{l-1}} + c^* \int \frac{du}{(u^2+1)^{l-1}}, \qquad (\star\star)$$

wobei a^*, b^*, c^* zu bestimmende Konstanten sind. (Wenn dieser Ansatz gelingt, dann hat man das Problem „von $l > 1$ auf $l - 1 \geq 1$“ reduziert. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt das Ausgangsintegral auf ein Grundintegral zurück.)

Differenziert man die Gleichung $(\star\star)$, dann erhält man (analog wie bei der Partialbruchzerlegung) eine Gleichheit von rationalen Funktionen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich a^*, b^*, c^* bestimmen lassen.
Es ergibt sich:

$$a^* = \frac{1}{2(l-1)}, \quad b^* = 0, \quad c^* = \frac{2l-3}{2l-2}.$$

(vgl. auch Literaturangabe [2], Band 3, Nr. 13, Seite 38)