Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Beispiele.

1. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \sqrt{1+x^2} \cdot x \, dx.$ **9/1/21/1**

Es sei $I = (-\infty, \infty)$, und $J = [0, \infty)$. Setzt man $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(x) = 1 + x^2$, dann ist $g'(x) = 2x$ und $\sqrt{1+x^2} \cdot x = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \cdot 2x = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Eine Stammfunktion von $f(t) = \sqrt{t}$ ist durch $\frac{2}{3}\sqrt{t^3}$ gegeben. Folglich ist

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

2. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx$ mit $g(x) \neq 0$. **9/1/21/2**

Setzt man $f(t) = \frac{1}{t}$ und $t = g(x)$, dann ist $\frac{g'(x)}{g(x)} = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

$\ln |t|$ ist eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln |g(x)| + c.$$

3. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \, dx.$ **9/1/21/3**

Wir versuchen dies wieder mit Hilfe der Substitutionsregel.
Hierzu setzen wir $t = \mathrm{e}^x$. Folglich ist $\frac{dt}{dx} = \mathrm{e}^x$. Rechnet man mit Differentialen, dann ergibt sich hieraus $dx = \frac{dt}{\mathrm{e}^x} = \frac{dt}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \, dx = \int \frac{1}{t(1+t)} \, dt.$$

Der Integrand wird mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* so umgeformt, daß sich die resultierenden Integrale leichter berechnen lassen. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

wobei A und B Konstanten sind und die Gleichheit als Gleichheit von rationalen Funktionen zu verstehen ist. Multipliziert man die Gleichung mit der Nennerfunktion $t(t+1)$, dann erhält man die folgende Polynomgleichheit:

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A.$$

Ein Koeffizientenvergleich der auf beiden Seiten der Gleichheit stehenden Polynome liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A + B &= 0, \end{aligned}$$

mit den Unbekannten A, B. Die Lösung ergibt $B = -A = -1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,dx &= \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + c \\ &= \ln \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + c \\ &= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + c. \end{aligned}$$

4. Es soll nun $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ berechnet werden. **9/1/21/4**

Wir versuchen dies erneut mit der Partialbruchzerlegung. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung (Gleichheit von Funktionen) mit der Nennerfunktion $x^2(x^2+1)$, dann entsteht eine Gleichung zwischen zwei Polynomen:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\ &= Ax^2 + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (B+C)x^3 + (A+D)x^2 + Bx + A. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man hieraus sofort:

$$A = 1,\ D = -A = -1,\ B = 0,\ C = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + c. \end{aligned}$$

5. Will man das unbestimmte Integral von **9/1/21/5**

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^m(x^2+bx+c)^n}$$

für den Fall bestimmen, daß x^2+bx+c keine reelle Nullstelle besitzt, dann macht man bei der Partialbruchzerlegung folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{(x-a)^m(x^2+bx+c)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} +$$

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

6. Hat man eine beliebige rationale Funktion $f(x)$ in der Form $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ gegeben, dann kann durch Polynomdivision immer erreicht werden, daß **9/1/21/6**

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei der Grad von $r(x)$ kleiner ist als der Grad von $q(x)$.

Für die entsprechende Partialbruchzerlegung von $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ macht man folgenden Ansatz:

$$\frac{r(x)}{(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}} =$$

$$\frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \cdots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}} +$$

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l} + \cdots + \frac{B_{ln_l}x+C_{ln_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}},$$

wobei $q(x)$ schon als Produkt gegeben sei und die Faktoren $x^2+b_ix+c_i$ keine reellen Nullstellen besitzen sollen. Die Multiplikation der Gleichung mit $q(x)$ liefert wieder eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} berechnen kann. Mit dieser Methode bleiben schließlich nur noch Integrale über Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}$$

zu berechnen.

Bei der ersten Funktion substituiert man $t = x - a$, und löst auf diese Weise das Integral.

Bei der zweiten Funktion ist $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2+c-(\frac{b}{2})^2$. Da x^2+bx+c keine reelle Nullstelle besitzt, ist $c-(\frac{b}{2})^2 > 0$. Der Einfachheit wegen setzen wir $c-(\frac{b}{2})^2 := r^2$.

Substituiert man jetzt $t = x+\frac{b}{2}$, so ist $dx = dt$ und $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2+r^2 = t^2+r^2 = r^2((\frac{t}{r})^2+1)$.

Folglich erhält man

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}\,dx = \int \frac{At+(B-A\cdot\frac{b}{2})}{r^{2l}\left(\left(\frac{t}{r}\right)^2+1\right)^l}\,dt = \frac{1}{r^{2l}}\int \frac{At+C}{\left(\left(\frac{t}{r}\right)^2+1\right)^l}\,dt := (\star),$$

wobei $C := B - A\cdot\frac{b}{2}$.

Substituiert man erneut $u := \frac{t}{r}$, also $t = r\cdot u$ und $dt = r\cdot du$, so ergibt sich

$$(\star) = \frac{1}{r^{2l}}\int \frac{r\cdot Au+C}{(u^2+1)^l}\cdot r du = \frac{1}{r^{2l-2}}\int \frac{Au+C^*}{(u^2+1)^l}\,du, \text{ mit } C^* = \tfrac{c}{r}.$$

Es bleiben schließlich nur noch die Integrale

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^l}\,du \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2+1)^l}$$

zu berechnen.
Bei dem ersten Integral substituiert man $v := u^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad dv = 2u\,du,$ also

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^l}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^l},$$

und dies ist ein Grundintegral.
Das zweite Integral ist für $l = 1$ ein Grundintegral; für $l > 1$ führt folgender Ansatz schließlich zum Ziel:

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^l} = \frac{a^*u + b^*}{(u^2+1)^{l-1}} + c^* \int \frac{du}{(u^2+1)^{l-1}}, \qquad (\star\star)$$

wobei a^*, b^*, c^* zu bestimmende Konstanten sind. (Wenn dieser Ansatz gelingt, dann hat man das Problem „von $l > 1$ auf $l - 1 \geq 1$" reduziert. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt das Ausgangsintegral auf ein Grundintegral zurück.)

Differenziert man die Gleichung $(\star\star)$, dann erhält man (analog wie bei der Partialbruchzerlegung) eine Gleichheit von rationalen Funktionen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich a^*, b^*, c^* bestimmen lassen.
Es ergibt sich:

$$a^* = \frac{1}{2(l-1)}, \quad b^* = 0, \quad c^* = \frac{2l-3}{2l-2}.$$

(vgl. auch Literaturangabe [2], Band 3, Nr. 13, Seite 38)