

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Wir wenden uns nun dem Flächenproblem zu. Gegeben sei also ein abgeschlossenes Intervall  $I = [a, b]$  mit  $a < b$  und eine in  $I$  definierte und beschränkte Funktion  $f$ . Im folgenden sei stets – falls nichts anderes vereinbart wird –  $I$  dieses Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . (vgl. auch Abb. 9.1)

Wenn  $f$  in  $I$  nicht negativ ist und der Flächeninhalt  $A$  der ebenen Punktmenge  $M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  überhaupt existiert, dann muß folgende Ungleichung gelten (siehe Abb. 9.4)

$$(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq A \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

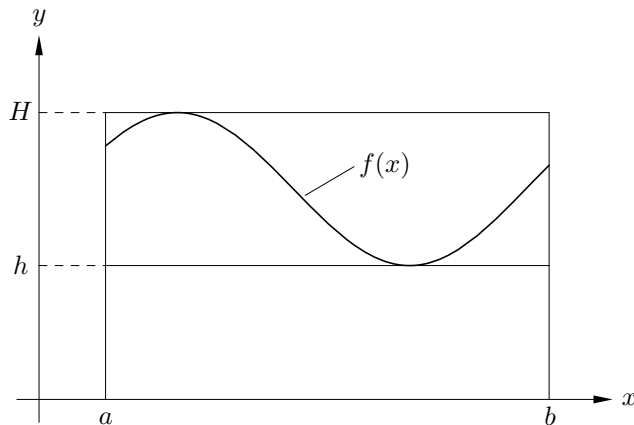


Abb. 9.4 Die Abbildung zeigt, daß der vermeintliche Flächeninhalt  $A$  zwischen dem Flächeninhalt des kleineren und des größeren Rechtecks liegen muß.  $h$  und  $H$  bezeichnen das Infimum bzw. das Supremum von  $f$  in  $[a, b]$ .

Mit dieser Grundidee versuchen wir jetzt, den vermeintlichen „Flächeninhalt“ näherungsweise zu berechnen (hierbei setzen wir die Definition des Flächeninhalts eines Rechtecks als gegeben voraus.)

Zur Behandlung des Problems benötigen wir einige neue Begriffsbildungen: *Zerlegung eines Intervalls, Untersumme, Obersumme, Verfeinerung einer Zerlegung.*