

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Satz 9.5 *Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I . Dann gilt:* 9/2/6

- (1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
- (2) $(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ und $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x)$.
- (3) Ist \mathfrak{z}' eine Verfeinerung von \mathfrak{z} , dann gilt $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2)$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$.

9/2/7

(1). Wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$ gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) = \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

(2). Für $i = 0, \dots, n$ ist offenbar $I_i \subseteq I$ und damit auch

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) &= \left(\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \right) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \left(\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \right) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \\ &= \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) = \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I} f(x) = (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x). \end{aligned}$$

(3). Sei $(a_0^i, \dots, a_{n_i+1}^i)$ die entsprechende Zerlegung von I_i , die durch die Verfeinerung \mathfrak{z}' von \mathfrak{z} erzeugt wird, und es sei $I_{ij} = [a_j^i, a_{j+1}^i]$.

Analog wie im Beweis von (2) erhält man:

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sum_{j=0}^{n_i} (a_{j+1}^i - a_j^i) \cdot \inf_{x \in I_{ij}} f(x) \tag{*}$$

und

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \geq \sum_{j=0}^{n_i} (a_{j+1}^i - a_j^i) \cdot \sup_{x \in I_{ij}} f(x). \quad (**)$$

Addiert man die Ungleichungen $(*)$ bzw. $(**)$ bezüglich i , dann erhält man die gewünschte Behauptung.

(4). Es sei \mathfrak{z}' eine gemeinsame Verfeinerung von \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 , d.h., alle Unterteilungspunkte von \mathfrak{z}_1 und von \mathfrak{z}_2 sind auch Unterteilungspunkt von \mathfrak{z}' . Dann gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}). \quad \square$$