Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Beispiel. Wir diskutieren jetzt ein Beispiel dafür, daß das Unterintegral kleiner ist als **9/2/12**
das Oberintegral.

Dazu sei $I = [0,1]$ und $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 1, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Dann gilt für jede Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I und jedes Teilintervall $I_i = [a_i, a_{i+1}] \subseteq I$:

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = 2.$$

Folglich ist

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{=1} = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_0 = 1$$

und

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{=2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = 2.$$

Für eine beliebige Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I ist also stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = 1 < 2 = \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
Folglich ist auch

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1 < 2 = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx.$$

Damit ist die Funktion f in I nicht integrierbar, und die entsprechende Punktmenge M besitzt keinen Flächeninhalt. (siehe auch Abb. 9.6)

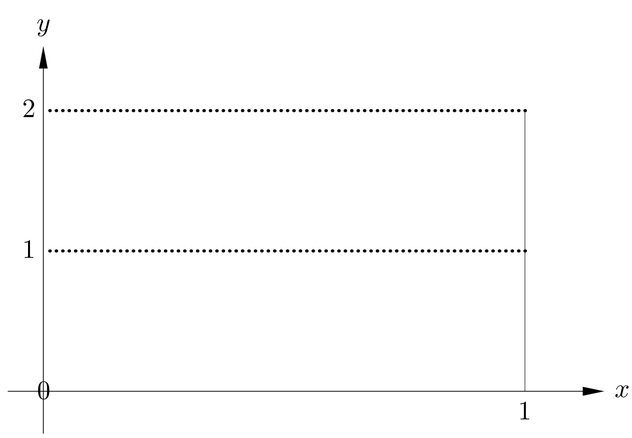

Abb. 9.6 Die Abbildung zeigt (symbolisch) die in der obigen Bemerkung definierte Funktion f mit $I = [0,1]$ und $x \in I$. Der dort betrachteten ebenen Punktmenge $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist kein Flächeninhalt zugeordnet.