

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Satz 9.6 Ist f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ 9/2/13
ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Beweis. (1). Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Unterintegrals existiert eine Zerlegung 9/2/14
 $\mathfrak{z}' = (a_0, \dots, a_{n+1})$ von I , so daß

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da f in I beschränkt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(x)| < c$ für alle $x \in I$.

Es sei

$$\delta := \min \left\{ d(\mathfrak{z}'), \frac{\varepsilon}{6c(n+1)} \right\}$$

und \mathfrak{z} eine beliebige Zerlegung von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$. Wir zeigen:

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

Es sei \mathfrak{z}'' eine gemeinsame Verfeinerung von \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' . Dann ist $0 \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}'')$, also gilt

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $d(\mathfrak{z}) < \delta < d(\mathfrak{z}')$ enthält jedes Intervall von \mathfrak{z} höchstens einen Zerlegungspunkt von \mathfrak{z}' als inneren Punkt. Die durch \mathfrak{z} entstehenden Intervalle werden in zwei Klassen zerlegt:

$M_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z} , die kein a_i von \mathfrak{z}' als inneren Punkt enthalten,

$M_2 :=$ Intervalle von \mathfrak{z} , die ein a_i von \mathfrak{z}' als inneren Punkt enthalten.

Mit der Zerlegung \mathfrak{z}'' erhält man die folgenden beiden Intervallmengen:

$M'_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z}'' , die schon zu M_1 gehören,

$M''_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z}'' , die nicht zu M_1 gehören.

In der Differenz $\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ liefern die Intervalle aus M_1 (diese gehören auch zu M'_1) keinen Beitrag (die entsprechenden Summanden heben sich gegenseitig auf). Es bleiben noch die Summanden zu berücksichtigen, die durch die Intervalle aus M_2 bzw. M''_2 entstehen.

M_2 enthält höchstens $(n+1)$ Intervalle und M''_2 höchstens $2(n+1)$.

Wegen $\left| (c-d) \cdot \inf_{x \in [c,d]} f(x) \right| < \delta \cdot c$, falls $|c-d| < \delta$, erhält man

$$|\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})| \leq 3(n+1)c \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) zeigt man analog. \square