Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Satz 9.7 *Sei f in $I=[a,b]$ definiert und beschränkt und $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I. Dann gilt:* **9/2/16**

(1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

(2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

(3) *Ist f in I integrierbar, dann sind die Limites in* (1) *und* (2) *gleich* $\int_a^b f(x)\,dx.$

Beweis. (1). Es ist zu zeigen: Wenn $\varepsilon>0$, dann existiert ein ν_0, so daß für jedes $\nu\ge\nu_0$ gilt: **9/2/17**

$$\left|\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Nach Satz 9.6 existiert für $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß $\left|\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu)\right| < \varepsilon$, falls $d(\mathfrak{z}_\nu)<\delta$. Nach Voraussetzung ist $(d(\mathfrak{z}_\nu))$ eine Nullfolge, folglich existiert ein ν_0, so daß $d(\mathfrak{z}_\nu)<\delta$ für alle $\nu\ge\nu_0$. Damit leistet ν_0 für die Behauptung (1) das Verlangte.

(2) beweist man analog.

(3) ist eine triviale Folgerung aus (1) und (2). ❏