Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.3 Integrierbarkeitskriterien

Satz 9.8 (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*) **9/3/1**
Sei f in $I=[a,b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt: f ist in I integrierbar gdw für jedes $\varepsilon>0$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I existiert, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\varepsilon$.

Beweis. $(\longrightarrow)$ Sei f in I integrierbar, also $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$ **9/3/2**
Sei $\varepsilon>0$. Nach Satz 9.6 existiert ein $\delta>0$, so daß für jedes $\mathfrak{z}$ mit $d(\mathfrak{z})<\delta$ gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \overline{S}_f(\mathfrak{z})-\overline{\int_a^b} f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, dann erhält man:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \;+\; \overline{S}_f(\mathfrak{z})-\overline{\int_a^b} f(x)\,dx<\varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung Unter- und Oberintegral übereinstimmen, ergibt sich
$\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\varepsilon$ sogar für jede Zerlegung $\mathfrak{z}$ mit $d(\mathfrak{z})<\delta$.
$(\longleftarrow)$ Annahme: f ist in I nicht integrierbar. Also

$$0<\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx:=\varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert für dieses $\varepsilon>0$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I, so daß
$\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\varepsilon$. Folglich ist

$$\varepsilon=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\le\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\varepsilon. \quad N! \qquad \square$$