

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Satz 9.9 *Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt:* 9/3/6
 f ist in I integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) und jede Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen τ_ν gilt:

Es existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ (und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b f(x) dx$.)

Beweis. (\longrightarrow) Nach Voraussetzung ist $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. 9/3/7

Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) gilt nach Satz 9.7:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Ist (τ_ν) eine zu (\mathfrak{z}_ν) gehörende Folge von Zwischenstellensystemen, dann ist nach der obigen Bemerkung stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

(\longleftarrow) Angenommen, f ist unter der gemachten Voraussetzung nicht integrierbar, also

$$\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx.$$

Sei (\mathfrak{z}_ν) eine beliebige ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I , dann konvergiert $S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ für jedes zugehörige Zwischenstellensystem (τ_ν) . Wir konstruieren jetzt ein Zwischenstellensystem, so daß die entsprechende Folge der Zwischensummen nicht konvergiert, und dies liefert uns den gewünschten Widerspruch.

Es sei $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$, $\nu \geq 0$ und $I_{i\nu} = [a_i^\nu, a_{i+1}^\nu]$.

Offenbar lassen sich $\inf_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ und $\sup_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ beliebig gut durch Funktionswerte $f(\xi_i^\nu)$ annähern. Für jedes ν konstruieren wir ein τ_ν wie folgt:

Ist ν gerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x) < \frac{1}{n_\nu(b-a)}$, und

ist ν ungerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $\sup_{x \in I_{i\nu}} f(x) - f(\xi_i^\nu) < \frac{1}{n_\nu(b-a)}$.

Auf diese Weise erhält man für jedes ν ein Zwischenstellensystem $\tau_\nu = (\xi_0^\nu, \dots, \xi_{n_\nu}^\nu)$.

Für gerade ν gilt dann

$$\begin{aligned}
0 \leq S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) &= \sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \underbrace{\left(f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x) \right)}_{< \frac{1}{n_\nu(b-a)}} \\
&< \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{= b-a} \cdot \frac{1}{n_\nu(b-a)} = \frac{1}{n_\nu}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man $0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) < \frac{1}{n_\nu}$ für ungerade ν .

Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) := c$.

Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu))$ gegen c , insbesondere konvergieren die Teilfolgen mit den geraden bzw. mit den ungeraden Indizes gegen c . Wir haben also insgesamt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für ungerade } \nu,$$

und somit gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Schließlich erhält man mit Hilfe von Satz 9.7:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Das widerspricht der Annahme. Folglich ist f in I integrierbar. \square