

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.10 *Ist f in I stetig, dann ist f in I integrierbar.* 9/4/0

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Riemann-Kriteriums. 9/4/1

Nach Voraussetzung ist f stetig in I , folglich ist f dort auch gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung \mathfrak{z} von I , so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Sei jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig, aber

$$0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zu diesem $\varepsilon' > 0$ existiert auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f in I ein $\delta' > 0$, so daß für jedes $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$\text{Wenn } |x_1 - x_2| < \delta', \text{ so } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon'.$$

Sei jetzt $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , so daß $d(\mathfrak{z}) < \delta'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{< \delta'} \cdot \underbrace{\left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)}_{\leq \varepsilon'} \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \varepsilon' \\ &= \varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i)}_{= b-a} \\ &= \varepsilon'(b-a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar. \square