

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.12 *Ist f in I definiert und monoton, dann ist f in I integrierbar.* 9/4/4

Beweis. (mit Hilfe des Riemann-Kriteriums) Sei $\varepsilon > 0$. Wir beweisen den Satz für monoton wachsendes f , für monoton fallende Funktionen erfolgt der Beweis analog. 9/4/5
 Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ mit $a_i = a + \frac{b-a}{n+1} \cdot i$. Dann ist offenbar $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n+1}$. Die Teilintervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ sind also alle gleich lang. Da f monoton wächst, ist

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = f(a_i) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = f(a_{i+1}).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{= \frac{b-a}{n+1}} \cdot \left(\underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{= f(a_{i+1})} - \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{= f(a_i)} \right) \\ &= \frac{b-a}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \frac{b-a}{n+1} \cdot (f(a_{n+1}) - f(a_0)) \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n+1} \\ &< \varepsilon, \quad \text{falls } n \text{ hinreichend groß gewählt wird.} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß f in I integrierbar ist. □