Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Beispiele.

1. Mit dem letzten Satz lassen sich Beispiele für Funktionen angeben, die in einem **9/4/6/1**
Intervall sogar unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen und trotzdem integrierbar sind (vgl. Abb. 9.10).

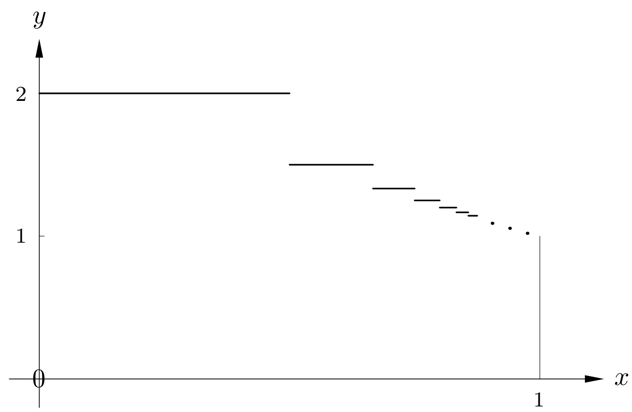

Abb. 9.10 Die Abbildung zeigt eine monoton fallende „*Treppenfunktion*“, wie sie in der Bemerkung betrachtet wird.

Sei $I = [0,1]$, (c_n) eine streng monoton wachsende Folge mit $c_0 = 0$ und $c_n \to 1$ (z.B. $c_n = \frac{n}{n+1}$), und $f(x)$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - c_n, & \text{für } c_n \leq x < c_{n+1} \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

f ist offenbar in jedem Punkt c_n unstetig, aber in I monoton fallend und daher integrierbar.

2. (vgl. dazu Literaturangabe [3], Bd. II, Nr 300, Beispiele und Ergänzungen.) **9/4/6/2**

Sei $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m}, \quad m,n \in \mathbb{N} \text{ und } n,m \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Wir betrachten f in dem Intervall $I = [0,1]$.
Dann ist f in allen irrationalen Punkten aus I stetig und in allen rationalen unstetig (vgl. Aufgabe 6, Kapitel 5). Folglich liegen die Unstetigkeitsstellen dicht in dem Intervall. Trotzdem ist die Funktion in I integrierbar.