Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.14 *Ist* f *in* $[a,b]$ *integrierbar und* $a<c<b$, *dann ist* f *in* $[a,c]$ *und in* **9/4/10**
$[c,b]$ *integrierbar, und es ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon>0$. Nach dem Riemannkriterium existiert eine Zerlegung **9/4/11**
$\mathfrak{z}=(a_0,\ldots,a_{n+1})$ von $[a,b]$, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\varepsilon$. O.B.d.A. sei c ein Unterteilungspunkt von $\mathfrak{z}$ (anderenfalls betrachtet man die Verfeinerung von $\mathfrak{z}$, die durch Hinzunahme des Punktes c entsteht). Sei $c=a_k$ und seien $\mathfrak{z}_1=(a_0,\ldots,a_k)$ und $\mathfrak{z}_2=(a_k,\ldots,a_{n+1})$. Dann sind $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. von $[c,b]$. Damit erhält man

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})=\overline{S}_f(\mathfrak{z}_1)+\overline{S}_f(\mathfrak{z}_2)-\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1)-\underline{S}_f(\mathfrak{z}_2)<\varepsilon$$

und damit auch

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i)-\underline{S}_f(\mathfrak{z}_i)<\varepsilon \quad \text{für } i=1,2.$$

Folglich ist f in $[a,c]$ und in $[c,b]$ integrierbar.

Es sei nun $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $[a,b]$, und in jeder Zerlegung $\mathfrak{z}_\nu$ komme c als Unterteilungspunkt vor. Weiterhin seien $\mathfrak{z}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{z}_{\nu 2}$ analog aus $\mathfrak{z}_\nu$ gebildet, wie $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ aus $\mathfrak{z}$. Dann sind $\mathfrak{z}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{z}_{\nu 2}$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. von $[c,b]$. Mit Hilfe von Satz 9.7 erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu)\\
&= \lim_{\nu\to\infty}\Big(\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1})+\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2})\Big)\\
&= \lim_{\nu\to\infty}\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1})+\lim_{\nu\to\infty}\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2})\\
&= \underline{\int_a^c} f(x)\,dx+\underline{\int_c^b} f(x)\,dx\\
&= \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad \square
\end{aligned}$$