Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 *Sei* $a < b$, *und seien* f, g *in* I *integrierbar. Dann gilt:* **9/5/0**

(1) *Wenn* $f(x) \geq 0$ *für jedes* $x \in I$, *so ist* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(2) *Wenn* $f(x) \leq g(x)$ *für jedes* $x \in I$, *so ist* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Beweis. (1). Sei $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I und $I_i = [a_{i+1}, a_i]$. Dann **9/5/1**
ist wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf\limits_{x \in I_i} f(x) \geq 0$ auch

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \;\geq\; \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \;\geq\; 0.$$

(2). Wenn $f(x) \leq g(x)$, so $0 \leq g(x) - f(x)$ für jedes $x \in I$. Nach (1) gilt dann

$$0 \leq \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

also auch

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad ❏$$