Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Beweis. Gäbe es ein $c \in I$, so daß $f(c) > 0$, so wäre auch $g(x) := f(x) - \frac{f(c)}{2}$ für $x = c$ positiv. Da mit f auch g stetig ist, existiert eine ε-Umgebung von c, so daß g in $U_\varepsilon(c)$ ebenfalls positiv ist. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung, so daß $c - \varepsilon$ und $c + \varepsilon$ Zerlegungspunkte sind (ε hinreichend klein; für $c = a$ bzw. $c = b$ betrachtet man die entsprechende rechts- bzw. linksseitige Umgebung von c), etwa $c - \varepsilon = a_k$ und $c + \varepsilon = a_{k+1}$, dann ist $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ in $[a_k, a_{k+1}]$, also auch **9/5/3**

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf_{x \in I_k} f(x) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Damit ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) > 0\,. \qquad ❏$$