

Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Korollar. (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/6

Voraussetzungen über a, b, f, g, μ_1, μ_2 wie im Satz 9.16. Dann gilt:

(1) Ist $g = 1$ dann gibt es ein μ mit $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, so daß $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$.

(2) Ist f in I stetig, dann gibt es ein $\xi \in I$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis. (1) ist trivial.

9/5/7

(2). Da f in I stetig ist, nimmt f die Werte $\mu_1 = \inf_{x \in I} f(x)$ und $\mu_2 = \sup_{x \in I} f(x)$ als Funktionswerte an. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann für μ mit $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ auch ein $\xi \in I$, so daß $\mu = f(\xi)$. Damit gilt die Behauptung. \square

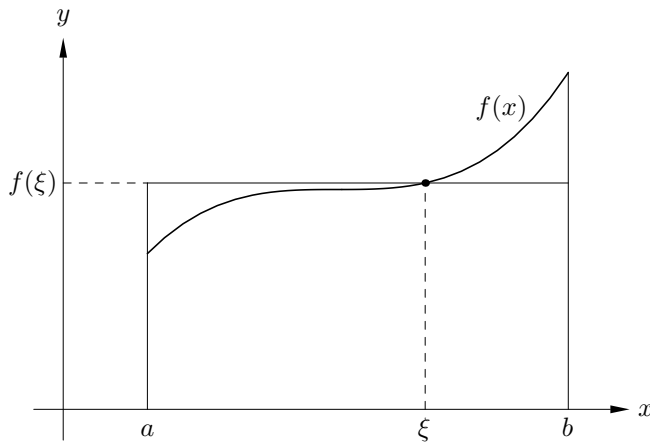


Abb. 9.11 Die Abbildung zeigt einen Spezialfall des Korollars, wobei in dem Teil (2) die Funktion g in I konstant 1 gewählt wurde.

Die durch das Integral $\int_a^b f(x) dx$ bestimmte Fläche der Punktmenge $M = \{(x, y) : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist dann flächengleich mit dem Rechteck der Breite $b - a$ und der Höhe $f(\xi)$.