Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.17 *Ist f in I integrierbar und $x \in I$, dann ist die durch* 9/5/9
$F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *definierte Funktion F in I stetig.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß f in jedem Punkt $c \in I$ stetig ist, d.h., wenn 9/5/10
$x \to c$, so $F(x) \to F(c)$. Es ist

$$\begin{aligned} F(x) - F(c) &= \int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^c f(t)\,dt \\ &= \int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_c^a f(t)\,dt \\ &= \int\limits_c^x f(t)\,dt \\ &= \mu_{x,c} \cdot (x-c). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung, wobei $\mu_{x,c}$ zwischen dem Infimum und dem Supremum der Funktion f in dem Intervall $[c,x]$ bzw. in $[x,c]$ liegt. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, also auch beschränkt, folglich muß auch $\mu_{x,c}$ in I beschränkt sein.
Wenn nun $x \to c$, so gilt auch $\mu_{x,c} \cdot (x-c) \to 0$, und damit auch $F(x) - F(c) \to 0$.
Folglich ist F in I stetig. ❏