Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.18 *Ist f in I stetig und $x \in I$, dann ist die durch $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ definierte Funktion F in I differenzierbar, und es ist $F' = f$* **9/5/11**

(d.h., F ist eine Stammfunktion von f in I).

Beweis. Es gelte $x, c \in I$ und $x \neq c$. Dann erhält man mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Korollar (2)): **9/5/12**

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-F(c)}{x-c} &= \frac{1}{x-c}\cdot\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^c f(t)\,dt\right)\\
&= \frac{1}{x-c}\cdot\int\limits_c^x f(t)\,dt\\
&= \frac{1}{x-c}\cdot f(\xi_x)\int\limits_c^x dt, \qquad \text{für ein } \xi_x \text{ zwischen } c \text{ und } x\\
&= \frac{1}{x-c}\cdot f(\xi_x)\cdot(x-c)\\
&= f(\xi_x).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f in c stetig. Wegen $x \to c$ und damit auch $\xi_x \to c$ gilt: $f(\xi_x) \to f(c)$. Folglich erhält man

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} \to f(c)\ .$$

Daher ist $F'(c) = f(c)$ für jedes $c \in I$. ❏