Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.21 (*Substitutionsregel*) **9/5/19**

Ist f *in* $[a,b]$ *stetig,* g *in* $[\alpha,\beta]$ *stetig differenzierbar und* $g([\alpha,\beta]) = [a,b]$, $g(\alpha) = a$ *und* $g(\beta) = b$, *dann gilt*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int\limits_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t)\,dt.$$

Ist außerdem g *injektiv, also* $\alpha = g^{-1}(\alpha)$ *und* $\beta = g^{-1}(b)$, *dann ist*

$$\int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt = \int\limits_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f; sie existiert nach Satz 9.18. Dann ist offenbar $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))$ in $[\alpha,\beta]$. Außerdem ist $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in $[\alpha,\beta]$ stetig. Folglich gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **9/5/20**

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= [F(g(x))]_{\alpha}^{\beta} \\
&= F(g(\beta)) - F(g(\beta)) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt. \qquad ❏
\end{aligned}$$