

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.22 (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/21

Ist f in $[a, b]$ monoton und differenzierbar und sind f', g in $[a, b]$ stetig, dann gibt

es ein $\xi \in [a, b]$, so daß
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \cdot \int_\xi^b g(x) dx.$$

Beweis. Ist f konstant, dann ist die Behauptung trivial.

9/5/22

Sei nun f nicht konstant und o.B.d.A. sei f in $[a, b]$ monoton wachsend, folglich ist $f(a) < f(b)$. (Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog.) Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f'(c) > 0$ für wenigstens ein $c \in [a, b]$.

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Bemerkung zum Satz 9.15 und folgt

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) > 0.$$

Es sei jetzt $G(x) := \int_a^x g(t) dt$. Nach Satz 9.18 ist G in $[a, b]$ differenzierbar und $G' = g$. Mit Hilfe der partiellen Integration (Satz 9.20) erhält man

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx. \quad (\star)$$

Nach dem Korollar zum erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so daß

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)G(x) dx &= G(\xi) \cdot \int_a^b f'(x) dx \\ &= G(\xi) \cdot (f(b) - f(a)) \\ &= f(b) \cdot G(\xi) - f(a) \cdot G(\xi). \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Wegen $G(a) = 0$ und $G(b) - G(\xi) = \int_\xi^b g(x) dx$ gilt nach (\star) und $(\star\star)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x) dx &= f(b)G(b) - f(a)G(a) - f(b)G(\xi) + f(a)G(\xi) \\ &= f(a)G(\xi) + f(b) \cdot (G(b) - G(\xi)) \\ &= f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \cdot \int_\xi^b g(x) dx. \quad \square\end{aligned}$$