Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.6 Volumen von Rotationskörpern

Beispiele.

(4). Wir berechnen jetzt das Volumen eines Torus. **9/6/1/4**

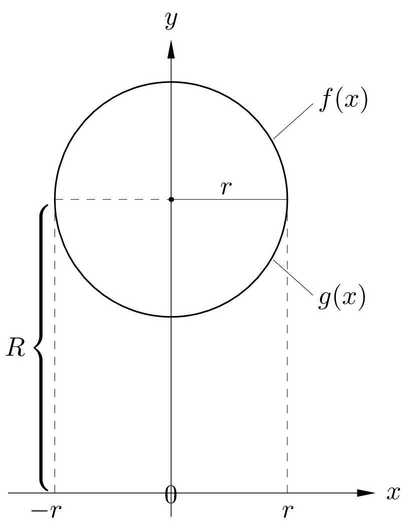

Abb. 9.16 a Die von f und g eingeschlossene Fläche erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen *Torus*.

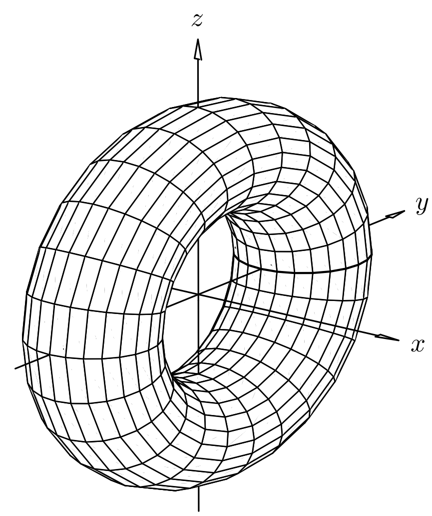

Abb. 9.16 b Die obige Abbildung zeigt diesen Torus räumlich-perspektivisch im Raum $\mathbb{R}^3$.

Dazu betrachten wir die Gleichung $(y-R)^2+x^2 = r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0, R)$ und dem Radius r. Löst man diese Gleichung nach y auf, dann erhält man zwei Funktionen $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$; den oberen und unteren Kreisbogen des Kreises. Läßt man die Fläche des entsprechenden Kreises um die x-Achse rotieren, dann erhält man einen Torus. Dessen Volumen ist gegeben durch

$$V = \int_{-r}^{r} (f^2(x) - g^2(x))\, dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^2(x) - g^2(x) &= R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) \\ &= 4R\sqrt{r^2 - x^2}, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$V = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral, um eine Stammfunktion zu erhalten.
Es ist

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= r \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx \\
&= r \int \sqrt{1 - t^2} \cdot r\,dt; \quad (\text{für } \frac{x}{r} = t) \\
&= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z\,dz; \quad (\text{für } t = \sin z) \\
&= r^2 \int \cos^2 z\,dz \qquad (\star) \\
&= r^2(\sin z \cos z + \int \underbrace{\sin^2 z}_{=1-\cos^2 z}\,dz); \quad (\text{partielle Integration}) \\
&= r^2(\sin z \cos z + z) - r^2 \int \cos^2 z\,dz.
\end{aligned}$$

Aus $(\star)$ und der letzten Zeile folgt

$$2r^2 \int \cos^2 z\,dz = \frac{r^2}{2} \sin z \cos z + z = \frac{r^2}{2} \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} + z.$$

Damit haben wir das unbestimmte Integral – allerdings bezüglich z – gelöst. Wir wollen aber das bestimmte Integral bezüglich x in den Grenzen von $-r$ bis r berechnen. Dazu müßten noch die Grenzen entsprechend der Substitutionen transformiert oder die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Folgende Substitutionen wurden vorgenommen:

$$t = \sin z \implies z = \arcsin t \quad \text{und} \quad \frac{x}{r} = t \implies z = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Für $-r \leq x \leq r$ gilt $-1 \leq \frac{x}{r} \leq 1$ und schließlich $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{r} \leq \frac{\pi}{2}$.

In den betrachteten Intervallen sind die Transformationen bijektiv, folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \frac{r^2}{2}\Big(\sin(\arcsin \frac{x}{r}) \cdot \sqrt{1 - \Big(\sin(\arcsin \frac{x}{r})\Big)^2} + \arcsin \frac{x}{r}\Big)\Big|_{-r}^{r} \\
&= \frac{r^2}{2}\Big(\frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \Big(\frac{x}{r}\Big)^2} + \arcsin \frac{x}{r}\Big)\Big|_{-r}^{r} \\
&= \frac{r^2}{2}\Big(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\Big) \\
&= \frac{r^2}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\Big) \\
&= \frac{r^2\pi}{2}
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, indem die Integrationsgrenzen entsprechend transformiert werden:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \frac{r^2}{2}\Big(\sin z \cos z + z\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{r^2}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\Big) \\
&= \frac{r^2\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Also

$$V = 4\pi R \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 2r^2 R\pi^2.$$