

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.6 Volumen von Rotationskörpern

Beispiele.

(1). Ist f konstant, $f = r$, dann erhält man mit dieser Formel den Rauminhalt eines Kreiszyklinders mit der Höhe $b - a$ und dem Radius r .

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b r^2 dx = \pi r^2(b - a) = r^2 \pi h.$$

(2). Es sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $I = [0, 1]$. Dann ist das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers gegeben durch

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

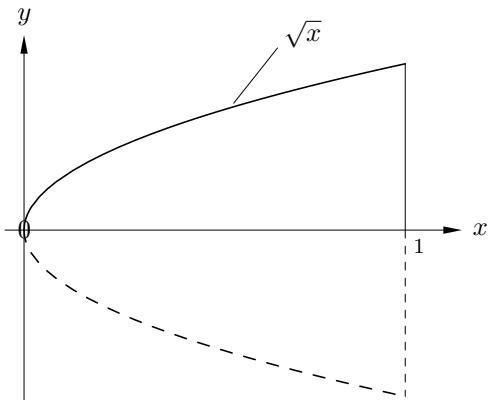


Abb. 9.14 a Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in der (x, y) -Ebene, definiert im Intervall $[0, 1]$ bzw. die Rotationsfigur im \mathbb{R}^3 , die durch Rotation von f um die x -Achse entsteht. Die z -Achse zeigt in Richtung des Betrachters.

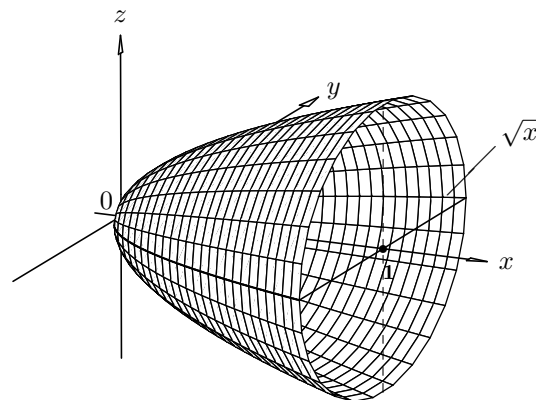


Abb. 9.14 b Diese Abbildung zeigt die gleiche Rotationsfigur wie auf der linken Seite. Diesmal ist jedoch der Rotationskörper räumlich-perspektivisch dargestellt.

(3). Es sei jetzt $I = [1, 2]$ und f, g seien in I definierte Funktionen, so daß $f(x) = x$ und $g(x) = 1$.

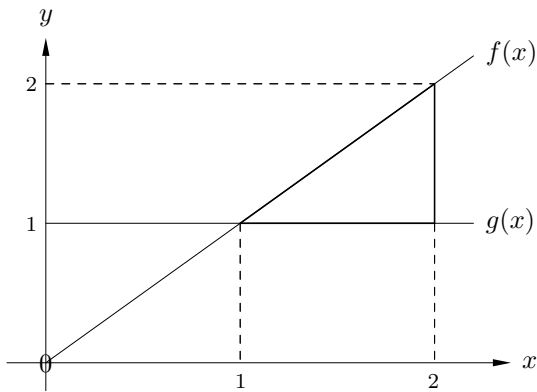


Abb. 9.15 Läßt man die stärker umrandete Dreiecksfläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht als Rotationskörper ein „Ring“.

Wir lassen die durch f und g bestimmte Fläche um die x -Achse rotieren und bestimmen das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers.

$$V = \pi \int_1^2 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Als Spezialfall erhält man das Volumen eines Kegels mit der Höhe h und dem Radius r . Hierfür ist nämlich $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ und $I = [0, h]$. Also

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

(4). Wir berechnen jetzt das Volumen eines Torus.

9/6/1/4

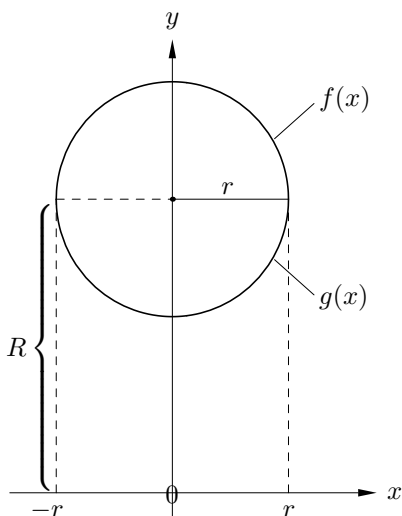


Abb. 9.16 a Die von f und g eingeschlossene Fläche erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen *Torus*.

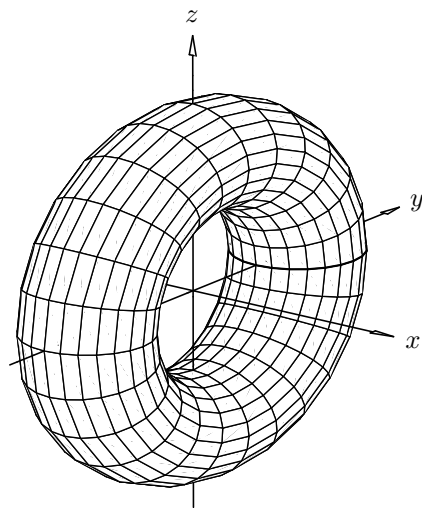


Abb. 9.16 b Die obige Abbildung zeigt diesen *Torus* räumlich-perspektivisch im Raum \mathbb{R}^3 .

Dazu betrachten wir die Gleichung $(y-R)^2+x^2=r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0, R)$ und dem Radius r . Löst man diese Gleichung nach y auf, dann erhält man zwei Funktionen $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$; den oberen und unteren Kreisbogen des Kreises. Läßt man die Fläche des entsprechenden Kreises um die x -Achse rotieren, dann erhält man einen Torus. Dessen Volumen ist gegeben durch

$$V = \int_{-r}^r (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^2(x) - g^2(x) &= R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) \\ &= 4R\sqrt{r^2 - x^2}, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$V = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral, um eine Stammfunktion zu erhalten.

Es ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= r \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx \\ &= r \int \sqrt{1 - t^2} \cdot r dt; \quad (\text{für } \frac{x}{r} = t) \\ &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z dz; \quad (\text{für } t = \sin z) \\ &= r^2 \int \cos^2 z dz \quad (\star) \\ &= r^2(\sin z \cos z + \int \underbrace{\sin^2 z}_{= 1 - \cos^2 z} dz); \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= r^2(\sin z \cos z + z) - r^2 \int \cos^2 z dz. \end{aligned}$$

Aus (\star) und der letzten Zeile folgt

$$2r^2 \int \cos^2 z dz = \frac{r^2}{2} \sin z \cos z + z = \frac{r^2}{2} \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} + z.$$

Damit haben wir das unbestimmte Integral – allerdings bezüglich z – gelöst. Wir wollen aber das bestimmte Integral bezüglich x in den Grenzen von $-r$ bis r berechnen. Dazu müßten noch die Grenzen entsprechend der Substitutionen transformiert oder die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Folgende Substitutionen wurden vorgenommen:

$$t = \sin z \implies z = \arcsin t \quad \text{und} \quad \frac{x}{r} = t \implies z = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Für $-r \leq x \leq r$ gilt $-1 \leq \frac{x}{r} \leq 1$ und schließlich $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{r} \leq \frac{\pi}{2}$.

In den betrachteten Intervallen sind die Transformationen bijektiv, folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \frac{r^2}{2} \left(\sin(\arcsin \frac{x}{r}) \cdot \sqrt{1 - \left(\sin(\arcsin \frac{x}{r})\right)^2} + \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} + \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r \\
&= \frac{r^2}{2} (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2}
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, indem die Integrationsgrenzen entsprechend transformiert werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \frac{r^2}{2} (\sin z \cos z + z) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also

$$V = 4\pi R \cdot \frac{r^2 \pi}{2} = 2r^2 R \pi^2.$$