Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.7 Uneigentliche Integrale

Beispiele.

(1). Es sei $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. **9/7/3/1**

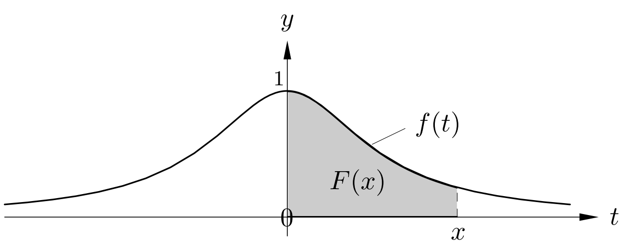

Abb. 9.17 a Der Flächeninhalt der schattierten Fläche ist durch das bestimmte Integral $F(x) := \int\limits_0^x f(t)\,dt$ gegeben.
Für $x \to \infty$ entsteht das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$.

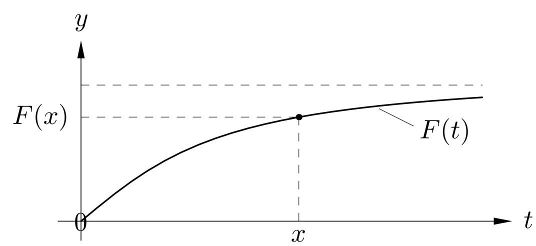

Abb. 9.17 b Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist $F(x) = \arctan x$ eine Stammfunktion von f, folglich gibt $F(x)$ den Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ (Inhalt der schattierten Fläche aus Abb. 9.17 a) an.

Gesucht ist das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, \infty)$.
Es ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{\infty} f(t)\,dt$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_0^x f(t)\,dx = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^x \\ &= \arctan x - \underbrace{\arctan 0}_{=0} = \arctan x. \end{aligned}$$

Damit gilt $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$. Also

$$\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Analog ist

$$G(x) = \int\limits_x^0 \frac{dt}{1+t^2}\,dt = \arctan 0 - \arctan x = -\arctan x$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} (-\arctan x) = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und somit} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Bemerkung. $\arctan x$ könnte auch durch $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ definiert werden. Interpretiert man das uneigentliche Integral als Fläche, dann schließt die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+t^2}$ mit der x-Achse in dem unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$ eine „endliche“ Fläche ein.

(2). Wir betrachten jetzt die Funktion $f(t) = \frac{1}{t}$ und zeigen, daß das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ nicht konvergiert. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß die „Fläche“, die von oben durch die Funktion und von unten durch die x-Achse in dem Intervall $[1, \infty)$ begrenzt wird, unendlich groß ist (vgl. Abb. 9.18). **9/7/3/2**

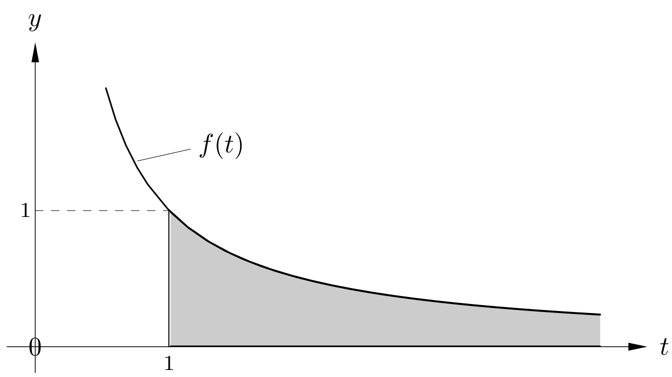

Abb. 9.18 Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t}$ konvergiert nicht, denn $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \infty$.

Es ist

$$F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

und

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty;$$

d.h. der Limes existiert nicht.