Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.8 Länge von Kurven

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \ldots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von $a_0, \ldots, a_{n+1}$ der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i))|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch **9/8/5**

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^{n} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

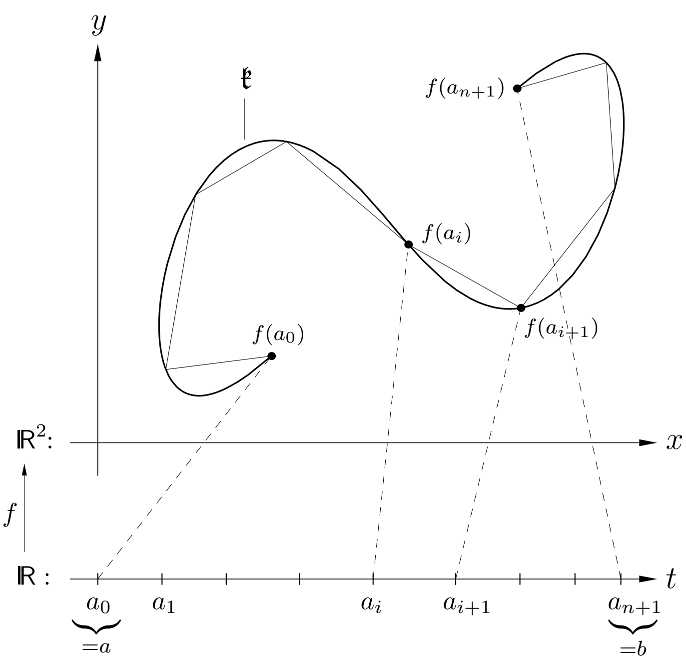

Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit einem einbeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \ldots, n + 1$, auf der Kurve $\mathfrak{k}$.

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.