

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Es sei jetzt $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve in \mathbb{R}^k . Insbesondere ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, \dots, f_k)$ und $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für jedes $j = 1, \dots, k$. Weiterhin sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, und der Einfachheit halber sei $u := a_i$ und $v := a_{i+1}$. Der Abstand zwischen den auf der Kurve liegenden Punkten $f(u)$ und $f(v)$ beträgt

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= \left| (f_1(v), \dots, f_k(v)) - (f_1(u), \dots, f_k(u)) \right| \\ &= \left| (f_1(v) - f_1(u), \dots, f_k(v) - f_k(u)) \right| = (\star). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind f_1, \dots, f_k differenzierbar in $[u, v]$. Folglich gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes f_j ein $\xi_{ij} \in [u, v]$, so daß

$$f_j(v) - f_j(u) = f'_j(\xi_{ij})(v - u). \quad (\xi_{ij} \text{ hängt von } [a_i, a_{i+1}] = [u, v] \text{ und } f_j \text{ ab.})$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= (\star) = \left| (f'_1(\xi_{i1}) \cdot (v - u), \dots, f'_k(\xi_{ik}) \cdot (v - u)) \right| \\ &= \left| (f'_1(\xi_{i1}), \dots, f'_k(\xi_{ik})) \cdot (v - u) \right| \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_{ij}))^2} \cdot (v - u). \end{aligned}$$

Also

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_{ij}))^2} \cdot (a_{i+1} - a_i).$$

Die Länge des einbeschriebenen Polygonzuges ist somit

$$\begin{aligned} l(P_{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_{ij}))^2} \cdot (a_{i+1} - a_i). \end{aligned}$$

Die letzte Summe sieht einer Zwischensumme bezüglich der Funktion

$$g(t) = |f'(t)| = |(f'_1(t), \dots, f'_k(t))| = \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(t))^2}$$

ähnlich. Offenbar ist für $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$ und $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$,

$$\begin{aligned} S_g(\mathfrak{z}, \tau) &= \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_i))^2} \cdot (a_{i+1} - a_i) \end{aligned}$$

eine Zwischensumme. Wir werden jetzt zeigen, daß sich $l(P_{\mathfrak{z}})$ und $S_g(\mathfrak{z}, \tau)$ bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig unterscheiden.