Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.8 Länge von Kurven

Satz 9.23 *Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *und* $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ *eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist* $\mathfrak{k}$ *rektifizierbar, und es gilt* **9/8/10**

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(f_j'(t)\right)^2}\,dt.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Menge **9/8/11**

$$M = \{l(P_{\mathfrak{z}}) : \ \mathfrak{z} \ \text{Zerlegung von} \ [a,b]\}$$

nach oben beschränkt ist ($\Longrightarrow$ es existiert $\sup M$, und somit ist $\mathfrak{k}$ rektifizierbar).

Angenommen, M ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge $(\mathfrak{z}_\nu)$ von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, so daß die Folge $\left(l(P_{\mathfrak{z}_\nu})\right)$ nicht nach oben beschränkt ist. Sei o.B.d.A. $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (durch entsprechende Verfeinerungen läßt sich dies immer erreichen; und aufgrund der Dreiecksungleichung wird bei einer verfeinerten Zerlegung der einbeschriebene Polygonzug höchstens länger). Nach dem Lemma gilt dann für $g(t) = |f'(t)|$.

$$\lim_{\nu\to\infty} \Big(\underbrace{l(P_{\mathfrak{z}_\nu})}_{=\alpha_\nu} - \underbrace{S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)}_{=\beta_\nu} \Big) = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von $g(t) = |f'(t)|$ in $[a,b]$ ist $|f'(t)|$ als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen in $[a,b]$ integrierbar. Folglich gilt nach Satz 9.9

$$\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \int_a^b |f'(t)|\,dt := d \in \mathbb{R}.$$

Da $\beta_\nu \to d$ und $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$ eine Nullfolge ist, muß auch die Folge (α_ν) gegen d konvergieren. Dies führt zum Widerspruch.

Folglich gilt $\alpha_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} l(\mathfrak{k})$, und damit ist $l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)|\,dt.$ ❏