

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Beispiele.

(1). Verbindungsstrecke zweier Punkte in der Ebene.

9/8/15/1

Es sei $\bar{a} = (1, 1)$ und $\bar{b} = (3, 2)$. Wählt man als Parameterintervall $[0, 1]$, dann ist durch $f(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1 + 2t, 1 + t) := (f_1(t), f_2(t))$ eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke \mathfrak{k} gegeben. Offenbar sind f_1, f_2 in $[0, 1]$ stetig differenzierbar und $f_1'(t) = 2, f_2'(t) = 1$ und damit $f'(t) = (2, 1)$ für jedes $t \in [0, 1]$. Folglich ist \mathfrak{k} rektifizierbar und

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 |f'(t)| dt = \int_0^1 |(2, 1)| dt = \int_0^1 \sqrt{2^2 + 1^2} dt = \sqrt{5}.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis in diesem einfachen Fall auch ohne Integrale erhalten.