Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
9.8 Länge von Kurven

Beispiele.

(4). Länge der Normalparabel, definiert im Intervall $[0,1]$ (Beispiel für die Berechnung der Länge einer Kurve mit Hilfe des Korollars zu Satz 9.23). **9/8/15/4**

Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = t^2$ und $f(t) = \big(t,\ g(t)\big)$.
Dann ist durch $\mathfrak{k} = \{f(t) : 0 \le t \le 1\}$ eine stetig differenzierbare Kurve gegeben und $f'(t) = (1,\ 2t)$. Also

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (g'(t))^2}\, dt = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = (\star)$$

Man berechnet zunächst am besten das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + 4t^2}\, dt &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{2}\Big((z \cdot \sqrt{1 + z^2}) + \ln(z + \sqrt{1 + z^2}\,)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((2t \cdot \sqrt{1 + 4t^2}) + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}\,)\Big).
\end{aligned}$$

(Die eigentliche Berechnung des Integrals $\int \sqrt{1 + z^2}\, dz$ bleibt als Übungsaufgabe.) Also

$$l(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2}\Big(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}\,)\Big).$$