

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Beispiele.

Bemerkung. Die Stetigkeit von f ist nicht hinreichend für die Rektifizierbarkeit der entsprechenden Kurve \mathfrak{k} . Wir betrachten als Beispiel die Funktion 9/8/15/5

$$f(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{\pi}{2t}) & \text{für } t \neq 0, \\ (0, 0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

f ist in $[0, \frac{1}{4}]$ stetig, aber nicht rektifizierbar.

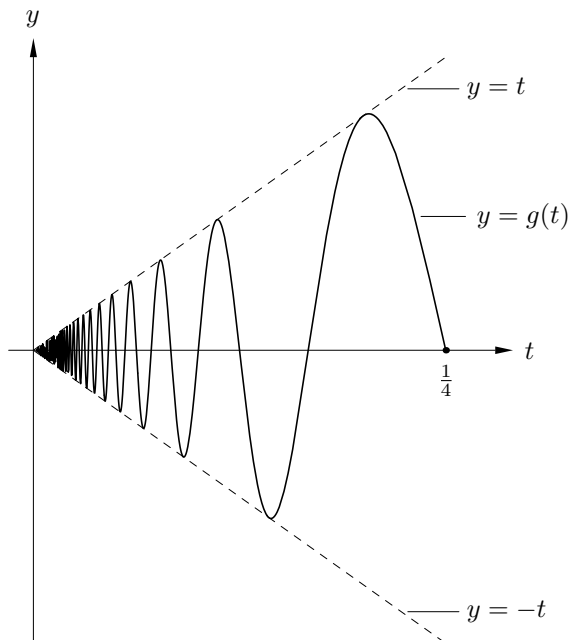


Abb. 9.24 Ist $g(t) := t \sin \frac{\pi}{2t}$, dann wird durch die Funktion $f : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ die hier gezeigte Kurve definiert. (Für größere t setzt sich die Kurve so nicht fort!.) An den Stellen $t = \frac{1}{2n}$, $n = 2, 3, 4, \dots$, ist $g(t)$ null; an den Stellen $\frac{1}{4n+1}$ bzw. $\frac{1}{4n+3}$ ist $g(t) = t$ bzw. $g(t) = -t$, hierbei ist $n = 1, 2, 3, \dots$

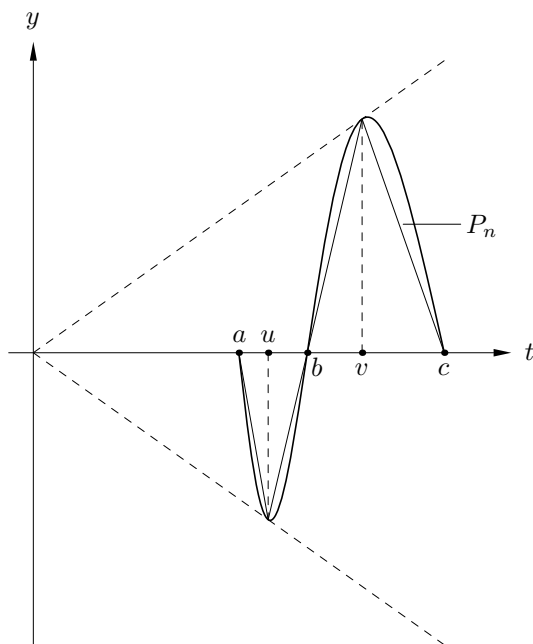


Abb. 9.25 In dieser Abbildung wird nur das Kurvenstück dargestellt, welches das Bild des Intervalls $[a, c]$ ist, wobei $a = \frac{1}{4n+4}$ und $c = \frac{1}{4n}$. Weiterhin ist $u = \frac{1}{4n+3}$, $b = \frac{1}{4n+2}$ und $v = \frac{1}{4n+1}$. Entsprechend dieser Zerlegung von $[a, c]$ ist P_n der einbeschriebene Polygonzug.

Wir betrachten jetzt die Funktion $g : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$ und die Kurve $\mathfrak{k} := \{f(t) = (t, g(t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}$ und zeigen, daß \mathfrak{k} nicht rektifizierbar ist.

Dazu sei $1 \leq n < k$ und $\mathfrak{z}_k = (\frac{1}{4k}, \dots, \underbrace{\frac{1}{4n+4}}_a, \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_u, \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_b, \underbrace{\frac{1}{4n+1}}_v, \underbrace{\frac{1}{4n}}_c, \dots, \frac{1}{4})$ eine

Zerlegung von $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{4}]$ (siehe auch Abb. 9.25).

Wir berechnen zunächst den Abstand zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(u, \underbrace{f(u)}_{-u})$ in

\mathbb{R}^2 . Es ist

$$\begin{aligned} |(u, -u) - (a, 0)| &= \left| \left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}, -\frac{1}{4n+3} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}, -\frac{4n+4}{(4n+3)(4n+4)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot |(1, -(4n+4))| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \sqrt{1 + (4n+4)^2} \\ &\geq \frac{1}{4n+3}. \end{aligned}$$

Völlig analog ist

$$|(u, -u) - (b, 0)| \geq \frac{1}{4n+3}.$$

Ebenso zeigt man, daß die Abstände zwischen $(b, 0)$ und $(v, \underbrace{f(v)}_{=v})$ bzw. zwischen (v, v) und $(c, 0)$ größer oder gleich $\frac{1}{4n+1}$ sind.

Insgesamt erhält man, daß der Polygonzug P_n eine Länge

$$l(P_n) \geq 2 \cdot \frac{1}{4n+3} + 2 \cdot \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

besitzt. Für die Länge des gesamten (einbeschriebenen) Polygonzuges $P_{\mathfrak{J}_k}$ bezüglich des Intervalls $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{k}]$ ist dann

$$l(P_{\mathfrak{J}_k}) \geq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1};$$

und diese Summe ist für $k \rightarrow \infty$, also für $\frac{1}{4k} \rightarrow 0$, nicht beschränkt. Folglich ist \mathfrak{k} nicht rektifizierbar.