# Kapitel 9
# Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen
## 9.8 Länge von Kurven

**Beispiele.**

(1). Verbindungsstrecke zweier Punkte in der Ebene. **9/8/15/1**

Es sei $\bar{a} = (1,1)$ und $\bar{b} = (3,2)$. Wählt man als Parameterintervall $[0,1]$, dann ist durch $f(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1+2t, 1+t) := \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke $\mathfrak{k}$ gegeben. Offenbar sind $f_1, f_2$ in $[0,1]$ stetig differenzierbar und $f_1'(t) = 2,\ f_2'(t) = 1$ und damit $f'(t) = (2,1)$ für jedes $t \in [0,1]$. Folglich ist $\mathfrak{k}$ rektifizierbar und

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 |f'(t)|\,dt = \int_0^1 |(2,1)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{2^2+1^2}\,dt = \sqrt{5}.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis in diesem einfachen Fall auch ohne Integrale erhalten.

(2). Umfang eines Kreises mit dem Radius $r$. **9/8/15/2**

Wir betrachten einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $r$ (vgl. auch Abb. 9.20).

Für die Kreislinie $\mathfrak{k}$ ist durch $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r\cos t,\ r\sin t)$ eine Parameterdarstellung gegeben. Offenbar ist $f$ in $[0,2\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t) = (-r\sin t,\ r\cos t)$. Folglich ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r$$

und damit

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{2\pi} |f'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = r2\pi.$$

(3). Länge der Schraubenlinie (vgl. Abb. 9.22). **9/8/15/3**

Wir betrachten eine Schraubenlinie mit dem Radius $r$ und zwei „Gewindegängen“. Es sei $f : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ct)$, $c \neq 0$. $f$ ist in $[0,4\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t) = (-r\sin t,\ r\cos t,\ c)$. Dann ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + c^2}\,dt = \sqrt{r^2+c^2}.$$

Damit erhält man

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2+c^2}\,dt = \sqrt{r^2+c^2}\cdot 4\pi.$$

(4). Länge der Normalparabel, definiert im Intervall $[0,1]$ (Beispiel für die Berechnung der Länge einer Kurve mit Hilfe des Korollars zu Satz 9.23). **9/8/15/4**

Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = t^2$ und $f(t) = \big(t,\ g(t)\big)$.
Dann ist durch $\mathfrak{k} = \{f(t) : 0 \le t \le 1\}$ eine stetig differenzierbare Kurve gegeben und $f'(t) = (1,\ 2t)$. Also

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 \sqrt{1 + (g'(t))^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = (\star)$$

Man berechnet zunächst am besten das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+4t^2}\, dt &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+z^2}\, dz \\ &= \frac{1}{2}\Big((z\cdot\sqrt{1+z^2}) + \ln(z + \sqrt{1+z^2}\,)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((2t\cdot\sqrt{1+4t^2}) + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2}\,)\Big).\end{aligned}$$

(Die eigentliche Berechnung des Integrals $\int \sqrt{1+z^2}\, dz$ bleibt als Übungsaufgabe.) Also

$$l(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2}\Big(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}\,)\Big).$$

**Bemerkung.** Die Stetigkeit von $f$ ist nicht hinreichend für die Rektifizierbarkeit der **9/8/15/5**
entsprechenden Kurve $\mathfrak{k}$. Wir betrachten als Beispiel die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} (t,\ t\sin\frac{\pi}{2t}) & \text{für } t \neq 0, \\ (0,0) & \text{für t} = 0. \end{cases}$$

$f$ ist in $[0, \frac{1}{4}]$ stetig, aber nicht rektifizierbar.

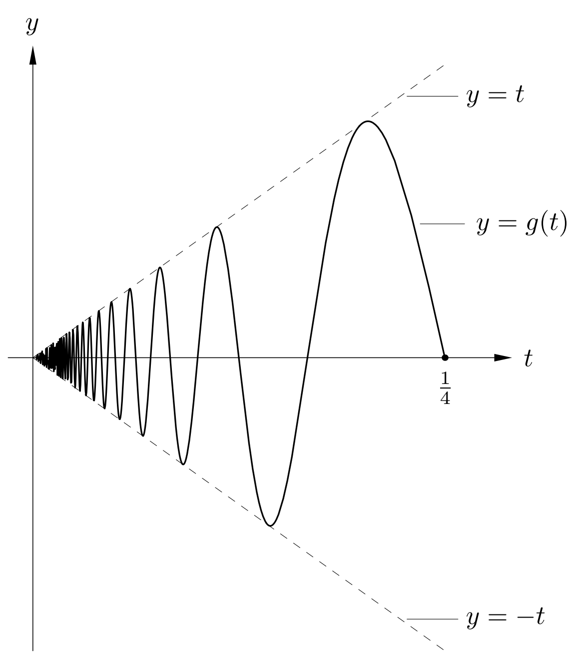


Abb. 9.24 Ist $g(t) := t\sin\frac{\pi}{2t}$, dann wird durch die Funktion $f : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ die hier gezeigte Kurve definiert. (Für größere $t$ setzt sich die Kurve so nicht fort!.) An den Stellen $t = \frac{1}{2n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, ist $g(t)$ null; an den Stellen $\frac{1}{4n+1}$ bzw. $\frac{1}{4n+3}$ ist $g(t) = t$ bzw. $g(t) = -t$, hierbei ist $n = 1, 2, 3, \ldots$.

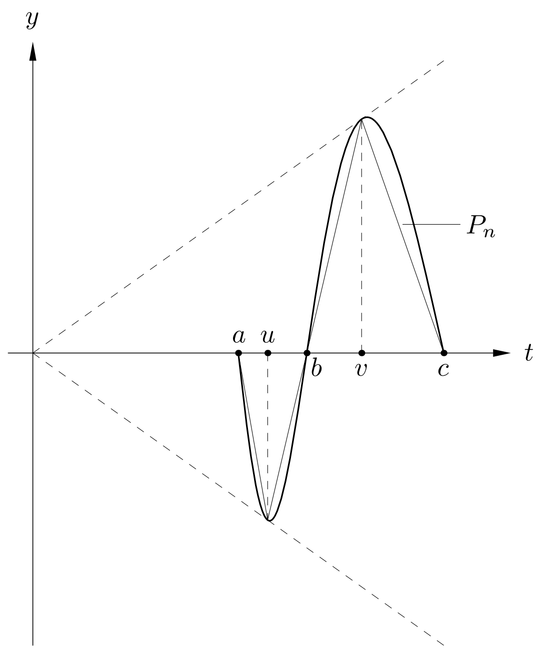


Abb. 9.25 In dieser Abbildung wird nur das Kurvenstück dargestellt, welches das Bild des Intervalls $[a, c]$ ist, wobei $a = \frac{1}{4n+4}$ und $c = \frac{1}{4n}$. Weiterhin ist $u = \frac{1}{4n+3}$, $b = \frac{1}{4n+2}$ und $v = \frac{1}{4n+1}$. Entsprechend dieser Zerlegung von $[a, c]$ ist $P_n$ der einbeschriebene Polygonzug.

Wir betrachten jetzt die Funktion $g : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$ und die Kurve $\mathfrak{k} := \{f(t) = (t, g(t)) : 0 \le t \le \frac{1}{4}\}$ und zeigen, daß $\mathfrak{k}$ nicht rektifizierbar ist.
Dazu sei $1 \le n < k$ und $\mathfrak{z}_k = (\frac{1}{4k}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{4n+4}}_{a}, \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_{u}, \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_{b}, \underbrace{\frac{1}{4n+1}}_{v}, \underbrace{\frac{1}{4n}}_{c}, \ldots, \frac{1}{4})$ eine Zerlegung von $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{4}]$ (siehe auch Abb. 9.25).
Wir berechnen zunächst den Abstand zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(u, \underbrace{f(u)}_{-u})$ in $\mathbb{R}^2$. Es ist

$$
\begin{aligned}
|(u, -u) - (a, 0)| &= \Big|\Big(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}, -\frac{1}{4n+3}\Big)\Big| \\
&= \left|\left(\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}, -\frac{4n+4}{(4n+3)(4n+4)}\right)\right| \\
&= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \Big|(1, -(4n+4)\,)\Big| \\
&= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \sqrt{1 + (4n+4)^2} \\
&\ge \frac{1}{4n+3}.
\end{aligned}
$$

Völlig analog ist

$$|(u,-u)-(b,0)| \geq \frac{1}{4n+3}.$$

Ebenso zeigt man, daß die Abstände zwischen $(b,0)$ und $(v,\underbrace{f(v)}_{=v})$ bzw. zwischen $(v,v)$ und $(c,0)$ größer oder gleich $\frac{1}{4n+1}$ sind.
Insgesamt erhält man, daß der Polygonzug $P_n$ eine Länge

$$l(P_n) \geq 2 \cdot \frac{1}{4n+3} + 2 \cdot \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

besitzt. Für die Länge des gesamten (einbeschriebenen) Polygonzuges $P_{\mathfrak{Z}_k}$ bezüglich des Intervalls $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{k}]$ ist dann

$$l(P_{\mathfrak{Z}_k}) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1};$$

und diese Summe ist für $k \to \infty$, also für $\frac{1}{4k} \to 0$, nicht beschränkt. Folglich ist $\mathfrak{k}$ nicht rektifizierbar.