Kapitel 9
Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Die Differentialrechnung ist u.a. durch das Tangentenproblem und das Geschwindigkeitsproblem motiviert. **9/0** Dabei ist also eine Funktion f – etwa die Funktion des zurückgelegten Weges eines sich bewegenden Massepunktes – gegeben, und die Ableitung f' der Funktion f – also die Funktion der Geschwindigkeit des Punktes – ist gesucht.

In der Praxis entsteht oft die umgekehrte Fragestellung. Z.B. kann die Funktion der Geschwindigkeit gegeben sein, und man sucht die Funktion des Weges. Also gegeben ist eine Funktion f, gesucht ist eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Dies führt uns in gewisser Weise zur Umkehrung des Differenzierens, zum (unbestimmten) Integrieren. Mit dieser Fragestellung verwandt, obwohl auf dem ersten Blick nicht zu erkennen, ist das sog. *Flächenproblem*:

Gegeben sei eine in einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ definierte und nicht negative Funktion f. Es erhebt sich die Frage, ob der ebenen Punktmenge

$$M = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

in „vernünftiger Weise“ ein Flächeninhalt zugeschrieben werden kann und wie dieser gegebenenfalls berechnet werden könnte? (siehe auch Abb. 9.1 und 9.2)

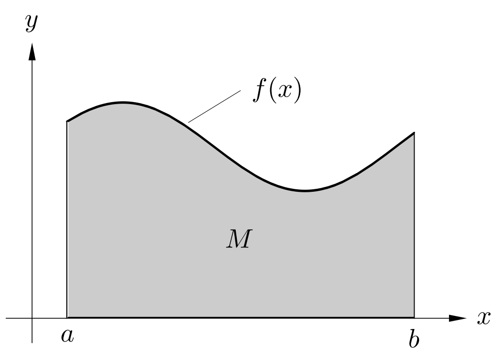

Abb. 9.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den vermeintlichen Flächeninhalt der oben definierten Punktmenge M.

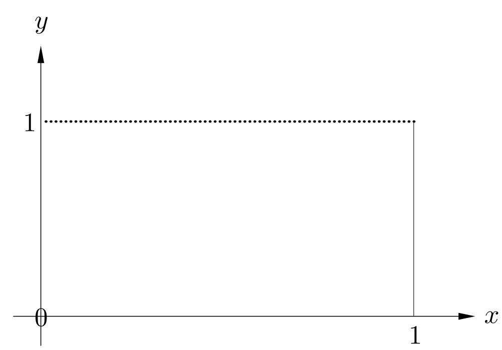

Abb. 9.2 Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
Läßt sich auch dieser Punktmenge M ein Flächeninhalt zuordnen?

Diese Fragestellungen werden in den nächsten beiden Abschnitten behandelt. Wir befassen uns zunächst mit der „Umkehrung des Differenzierens“.

9.1 Das unbestimmte Integral

Im folgenden seien – wenn nichts anderes vereinbart wird – f, g, F, G reellwertige Funk- **9/1/0**
tionen einer reellen Veränderlichen, und I sei ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Definition. (*Stammfunktion*) **9/1/1**

Es seien f, F in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert.

F ist eine *Stammfunktion* von f in M
$\underset{\text{Df}}{=}$ F ist in M differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in M$.

Satz 9.1 *Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f in einem Intervall I, dann unterscheiden sich F_1 und F_2 höchstens um eine additive Konstante.* **9/1/2**
(D.h., es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $F_1(x) = F_2(x) + c$ für jedes $x \in I$).

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $F_1' = f = F_2'$ in I. Folglich ist $F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)'$, **9/1/3**
und nach dem Korollar zum ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $F_1 - F_2$ konstant. ❏

Bemerkung. **9/1/4**

(1) Ist F_1 eine Stammfunktion von f in I und ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für jedes $x \in I$, dann ist offenbar auch F_2 eine Stammfunktion von f in I.
(2) Besitzt f überhaupt eine Stammfunktion in I und ist $x_0 \in I$, dann gibt es genau eine Stammfunktion F von f in I, so daß $F(x_0) = 0$.

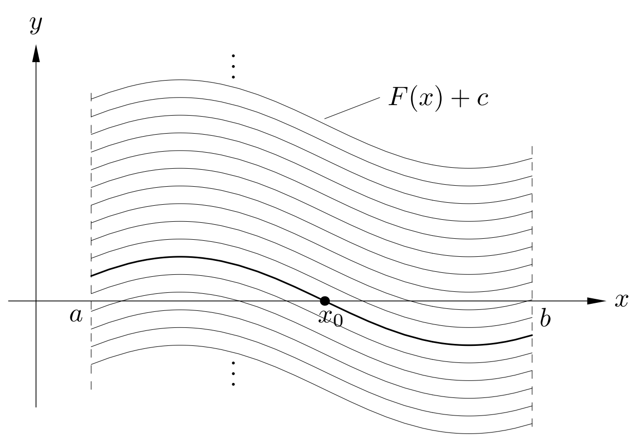

Abb. 9.3 Die Abbildung zeigt eine Schaar von Funktionen, die sich von F jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden. Ist F differenzierbar in $I = [a, b]$ und $F' = f$, dann symbolisiert diese Schaar die Menge aller Stammfunktionen von f in I, unter denen es für $x_0 \in I$ genau eine gibt, welche an der Stelle x_0 null wird.

Beweis zu (2). Ist F_1 eine beliebige Stammfunktion von f und $F_1(x_0) := c$, dann **9/1/5**
ist auch $F(x) = F_1(x) - c$ eine Stammfunktion, und es gilt $F(x_0) = F_1(x_0) - c = 0$.
Ist F^* ebenfalls eine Stammfunktion von f mit $F^*(x_0) = 0$, dann unterscheiden sich F^* und F nur um eine additive Konstante, also $F^* - F = c'$. Folglich ist $F^*(x_0) - F(x_0) = 0 = c'$.

Für diese – durch $x_0 \in I$ eindeutig bestimmte – Stammfunktion F benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$\textbf{Bez.:}\ \ F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt := \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Aus drucktechnischen Gründen schreiben wir für $\int\limits_{x_0}^{x} \cdots$ auch $\int_{x_0}^{x} \cdots$.

Offenbar gilt $F'(x) = \left(\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \right)' = f(x)$.

Definition. (*unbestimmtes Integral*) **9/1/6**

Die Menge aller Stammfunktionen von f in einem Intervall I heißt *unbestimmtes Integral* von f in I.

Bez.: $\int f(x)\,dx$.

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. **9/1/7**

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, \qquad |x| < 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, \qquad |x| > 1$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|.$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

Beispiel. Es gilt $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, wobei c eine beliebige Konstante ist. **9/1/8**

Es genügt zu zeigen, daß $F(x) = \ln|x| + c$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$ ist.
Für $x < 0$ ist $|x| = -x$, also $\ln|x| = \ln(-x)$ und schließlich
$F'(x) = \big(\ln(-x) + c\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.
Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und damit $F'(x) = \big(\ln|x| + c\big)' = \frac{1}{x}$.

Integration zusammengesetzter Funktionen **9/1/9**

Aus den Differentiationsregeln gewinnt man entsprechende Regeln für das Integrieren.

Satz 9.2 (*Integration einer Summe*) **9/1/10**
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. *Besitzen* f *und* g *Stammfunktionen in* I, *dann besitzt auch* $a \cdot f + b \cdot g$ *eine Stammfunktion in* I, *und es gilt*

$$\int \Big(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\Big)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx + b \cdot \int g(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$ und F, G seien die Stammfunktionen von f bzw. g, für die $F(x_0) = G(x_0) = 0$, also $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ und $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ und $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$. Dann ist offenbar $a \cdot F + b \cdot G$ die Stammfunktion von $a \cdot f + b \cdot g$ in I, welche an der Stelle x_0 Null wird. Also ist **9/1/11**

$$\int\limits_{x_0}^{x} (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\,dx = a \cdot F(x) + b \cdot G(x) = a \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + b \cdot \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx. \quad ❏$$

Bemerkung. Hieraus folgt sofort $\int (-f(x))\,dx = -\int f(x)\,dx$. **9/1/12**

Die Produktregel für das Differenzieren liefert eine entsprechende Regel für das Integrieren. Denn $(uv)' = u'v + uv'$, folglich ist uv eine Stammfunktion für $u'v + uv'$. Setzt man $u' = f$ und $v = g$, dann motiviert dies den folgenden Satz.

Satz 9.3 (*partielle Integration*) **9/1/13**
Es seien f *und* g *in* I *definiert. Besitzt* f *in* I *eine Stammfunktion* F *und ist* g *in* I *differenzierbar und besitzt* $F \cdot g'$ *in* I *eine Stammfunktion, dann besitzt auch* $f \cdot g$ *in* I *eine Stammfunktion, und es ist*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis. Es sei $x_0 \in I$ und o.B.d.A. sei F die Stammfunktion von f in I, die an der Stelle x_0 Null wird. Weiterhin sei **9/1/14**

$$h(x) := F(x)g(x) - \int_{x_0}^{x} F(x)g'(x)\,dx.$$

Dann ist h als Differenz zweier differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar in I, und es gilt

$$h'(x) = \underbrace{F'(x)}_{=f(x)} g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x).$$

Folglich ist h die Stammfunktion von $f \cdot g$ in I, die an der Stelle x_0 Null wird. Hieraus folgt die Behauptung. ❏

Bemerkung. Ersetzt man in Satz 9.3 f durch u' und damit F durch u, dann **9/1/15**

erhält man $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx.$

Beispiel. Es sei $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$. **9/1/16**

Wir versuchen, dieses Integral mit Hilfe der partiellen Integration zu berechnen.
Ansatz 1: $u'(x) = x$ und $v(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von x und $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Folglich ist

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x\,dx.$$

Das letzte Integral ist aber komplizierter als das Ausgangsintegral, demzufolge führt dieser Ansatz nicht zum Ziel.
Ansatz 2: $u'(x) = \mathrm{e}^x$ und $v(x) = x$. Dann ist $u(x) = \mathrm{e}^x$ eine Stammfunktion von e^x und $v'(x) = 1$. Folglich ist

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = x\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x\,dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x(x-1) + c.$$

Auch die Kettenregel für das Differenzieren liefert eine entsprechende Regel für das Integrieren. Denn $\big(u(v(x)\big)' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$, folglich ist $u(v(x))$ eine Stammfunktion von $u'(v(x)) \cdot v'(x)$. Setzt man $u' = f$ und $v = g$, dann motiviert dies folgenden Satz. **9/1/17**

Satz 9.4 (*Substitutionsregel*) **9/1/18**

Sei g in dem Intervall I und f in dem Intervall J definiert, und es sei $g(I) \subseteq J$. Besitzt f in J eine Stammfunktion und ist g in I differenzierbar, dann besitzt $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in I eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int_{x_0}^{x} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \quad \textit{wobei } x_0 \in I,\ t = g(x) \ \textit{ und } \ t_0 = g(x_0).$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$, $t_0 = g(x_0)$ und F die Stammfunktion von f in J, die in $t_0 \in J$ Null wird. **9/1/19**

Es gilt also $F(t_0) = F(g(x_0)) = 0$ und

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Folglich ist $F(g(x))$ die Stammfunktion von $f(g(x)) \cdot g'(x)$, die in x_0 Null wird, denn $F(g(x_0)) = F(t_0) = 0$. Also ist

$$F(\underbrace{g(x)}_{=t}) = \int_{x_0}^{x} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx,$$

und damit gilt auch

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx. \qquad \square$$

Mit Hilfe einer Stammfunktion F von f läßt sich sofort das unbestimmte Integral $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$ angeben. **9/1/20**

Beispiele.

1. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \sqrt{1+x^2} \cdot x\, dx.$ **9/1/21/1**

Es sei $I = (-\infty, \infty)$, und $J = [0, \infty)$. Setzt man $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(x) = 1 + x^2$, dann ist $g'(x) = 2x$ und $\sqrt{1+x^2} \cdot x = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \cdot 2x = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Eine Stammfunktion von $f(t) = \sqrt{t}$ ist durch $\frac{2}{3}\sqrt{t^3}$ gegeben. Folglich ist

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

2. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$ mit $g(x) \neq 0$. **9/1/21/2**

Setzt man $f(t) = \frac{1}{t}$ und $t = g(x)$, dann ist $\frac{g'(x)}{g(x)} = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

$\ln|t|$ ist eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln|g(x)| + c.$$

3. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\, dx.$ **9/1/21/3**

Wir versuchen dies wieder mit Hilfe der Substitutionsregel.
Hierzu setzen wir $t = \mathrm{e}^x$. Folglich ist $\frac{dt}{dx} = \mathrm{e}^x$. Rechnet man mit Differentialen, dann ergibt sich hieraus $dx = \frac{dt}{\mathrm{e}^x} = \frac{dt}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\, dx = \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt.$$

Der Integrand wird mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* so umgeformt, daß sich die resultierenden Integrale leichter berechnen lassen. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

wobei A und B Konstanten sind und die Gleichheit als Gleichheit von rationalen Funktionen zu verstehen ist. Multipliziert man die Gleichung mit der Nennerfunktion $t(t+1)$, dann erhält man die folgende Polynomgleichheit:

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A.$$

Ein Koeffizientenvergleich der auf beiden Seiten der Gleichheit stehenden Polynome liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A+B &= 0, \end{aligned}$$

mit den Unbekannten A, B. Die Lösung ergibt $B = -A = -1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,dx &= \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + c \\ &= \ln \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + c \\ &= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + c. \end{aligned}$$

4. Es soll nun $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ berechnet werden. **9/1/21/4**

Wir versuchen dies erneut mit der Partialbruchzerlegung. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung (Gleichheit von Funktionen) mit der Nennerfunktion $x^2(x^2+1)$, dann entsteht eine Gleichung zwischen zwei Polynomen:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\ &= Ax^2 + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (B+C)x^3 + (A+D)x^2 + Bx + A. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man hieraus sofort:

$$A = 1,\ D = -A = -1,\ B = 0,\ C = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + c. \end{aligned}$$

5. Will man das unbestimmte Integral von **9/1/21/5**

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^m(x^2+bx+c)^n}$$

für den Fall bestimmen, daß x^2+bx+c keine reelle Nullstelle besitzt, dann macht man bei der Partialbruchzerlegung folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{(x-a)^m(x^2+bx+c)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} +$$

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

6. Hat man eine beliebige rationale Funktion $f(x)$ in der Form $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ gegeben, dann kann durch Polynomdivision immer erreicht werden, daß **9/1/21/6**

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei der Grad von $r(x)$ kleiner ist als der Grad von $q(x)$.
Für die entsprechende Partialbruchzerlegung von $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ macht man folgenden Ansatz:

$$\frac{r(x)}{(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}} =$$

$$\frac{A_{11}}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{A_{k1}}{x-a_k}+\cdots+\frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}}+$$

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}}+\cdots+\frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l}+\cdots+\frac{B_{ln_l}x+C_{ln_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}},$$

wobei $q(x)$ schon als Produkt gegeben sei und die Faktoren $x^2+b_ix+c_i$ keine reellen Nullstellen besitzen sollen. Die Multiplikation der Gleichung mit $q(x)$ liefert wieder eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} berechnen kann. Mit dieser Methode bleiben schließlich nur noch Integrale über Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}$$

zu berechnen.
Bei der ersten Funktion substituiert man $t = x-a$, und löst auf diese Weise das Integral.
Bei der zweiten Funktion ist $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2+c-(\frac{b}{2})^2$. Da x^2+bx+c keine reelle Nullstelle besitzt, ist $c-(\frac{b}{2})^2 > 0$. Der Einfachheit wegen setzen wir $c-(\frac{b}{2})^2 := r^2$.
Substituiert man jetzt $t = x+\frac{b}{2}$, so ist $dx = dt$ und $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2+r^2 = t^2+r^2 = r^2((\frac{t}{r})^2+1)$.
Folglich erhält man

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}\,dx = \int \frac{At+(B-A\cdot\frac{b}{2})}{r^{2l}\Big(\big(\frac{t}{r}\big)^2+1\Big)^l}\,dt = \frac{1}{r^{2l}}\int \frac{At+C}{\Big(\big(\frac{t}{r}\big)^2+1\Big)^l}\,dt := (\star),$$

wobei $C := B-A\cdot\frac{b}{2}$.
Substituiert man erneut $u := \frac{t}{r}$, also $t = r\cdot u$ und $dt = r\cdot du$, so ergibt sich

$$(\star) = \frac{1}{r^{2l}}\int \frac{r\cdot Au+C}{(u^2+1)^l}\cdot r du = \frac{1}{r^{2l-2}}\int \frac{Au+C^*}{(u^2+1)^l}\,du, \text{ mit } C^* = \tfrac{c}{r}.$$

Es bleiben schließlich nur noch die Integrale

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^l}\,du \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2+1)^l}$$

zu berechnen.
Bei dem ersten Integral substituiert man $v := u^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad dv = 2u\,du$, also

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^l}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^l},$$

und dies ist ein Grundintegral.
Das zweite Integral ist für $l = 1$ ein Grundintegral; für $l > 1$ führt folgender Ansatz schließlich zum Ziel:

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^l} = \frac{a^*u + b^*}{(u^2+1)^{l-1}} + c^* \int \frac{du}{(u^2+1)^{l-1}}, \qquad (\star\star)$$

wobei a^*, b^*, c^* zu bestimmende Konstanten sind. (Wenn dieser Ansatz gelingt, dann hat man das Problem „von $l > 1$ auf $l - 1 \geq 1$“ reduziert. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt das Ausgangsintegral auf ein Grundintegral zurück.)

Differenziert man die Gleichung $(\star\star)$, dann erhält man (analog wie bei der Partialbruchzerlegung) eine Gleichheit von rationalen Funktionen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich a^*, b^*, c^* bestimmen lassen.
Es ergibt sich:

$$a^* = \frac{1}{2(l-1)}, \quad b^* = 0, \quad c^* = \frac{2l-3}{2l-2}.$$

(vgl. auch Literaturangabe [2], Band 3, Nr. 13, Seite 38)

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Wir wenden uns nun dem Flächenproblem zu. Gegeben sei also ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ und eine in I definierte und beschränkte Funktion f. Im folgenden sei stets – falls nichts anderes vereinbart wird – I dieses Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. (vgl. auch Abb. 9.1) **9/2/0**

Wenn f in I nicht negativ ist und der Flächeninhalt A der ebenen Punktmenge $M := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ überhaupt existiert, dann muß folgende Ungleichung gelten (siehe Abb. 9.4)

$$(b-a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq A \leq (b-a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

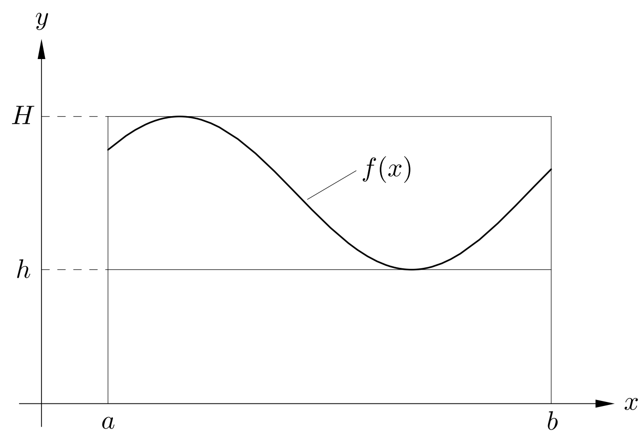

Abb. 9.4 Die Abbildung zeigt, daß der vermeintliche Flächeninhalt A zwischen dem Flächeninhalt des kleineren und des größeren Rechtecks liegen muß. h und H bezeichnen das Infimum bzw. das Supremum von f in $[a,b]$.

Mit dieser Grundidee versuchen wir jetzt, den vermeintlichen „Flächeninhalt" näherungsweise zu berechnen (hierbei setzen wir die Definition des Flächeninhalts eines Rechtecks als gegeben voraus.)

Zur Behandlung des Problems benötigen wir einige neue Begriffsbildungen: *Zerlegung eines Intervalls, Untersumme, Obersumme, Verfeinerung einer Zerlegung.*

Definition. (*Zerlegung*) **9/2/1**

$\mathfrak{z}$ ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $\mathfrak{z}$ ist eine endliche Folge $(a_0, \ldots, a_{n+1})$ von reellen Zahlen $a_0, \ldots, a_{n+1}$, so daß $a := a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$.

Die Elemente $a_0, \ldots, a_{n+1}$ heißen dann *Unterteilungspunkte* von $\mathfrak{z}$, **9/2/2**
$I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i-te Teilintervall bezüglich $\mathfrak{z}$, und
$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \ldots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm, Feinheitsmaß,…*) von $\mathfrak{z}$.

Definition. (*Untersumme, Obersumme*) **9/2/3**

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$

$$\underset{\text{Df}}{\equiv} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$

$$\underset{\text{Df}}{\equiv} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

9/2/4

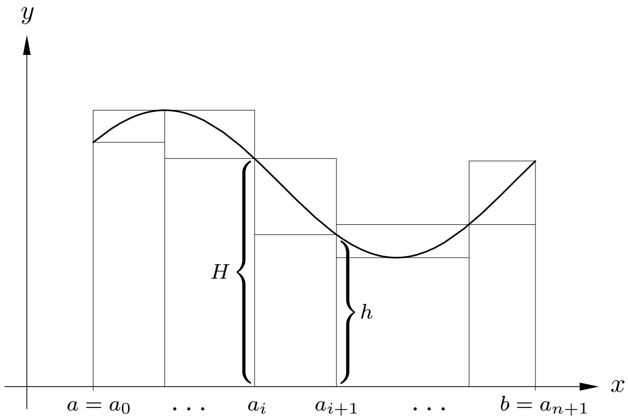

Abb. 9.5 Mit Hilfe des i-ten Intervalls $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ werden zwei Rechtecke definiert, deren Breite jeweils $a_{i+1} - a_i$ beträgt und deren Höhe durch $h := \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$ bzw. $H := \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$ festgelegt ist. Die Summe der jeweils kleineren Rechtecke ergibt die Untersumme und die der größeren die Obersumme bei der angegebenen Zerlegung.

Definition. (*Verfeinerung*) 9/2/5

Es seien $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ Zerlegungen von I.
$\mathfrak{z}'$ ist eine *Verfeinerung* von $\mathfrak{z}$
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Alle Unterteilungspunkte von $\mathfrak{z}$ sind auch Unterteilungspunkte von $\mathfrak{z}'$.

Satz 9.5 *Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I. Dann gilt:* 9/2/6

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.

(2) $(b - a) \cdot \inf\limits_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ *und* $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup\limits_{x \in I} f(x)$.

(3) *Ist $\mathfrak{z}'$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{z}$, dann gilt* $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.

(4) *Es ist stets* $\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2)$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$. 9/2/7

(1). Wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf\limits_{x \in I_i} f(x) \leq \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$ gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \;\leq\; \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \;=\; \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

(2). Für $i = 0, \dots, n$ ist offenbar $I_i \subseteq I$ und damit auch

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Folglich ist

$$(b-a)\cdot\inf_{x\in I} f(x) \;=\; \Big(\sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)\Big)\cdot\inf_{x\in I} f(x) \;\le\; \Big(\sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)\Big)\cdot\inf_{x\in I_i} f(x)$$

$$=\; \sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)\cdot\inf_{x\in I_i} f(x) \;=\; \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \;\le\; \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \;=\; \sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)\cdot\sup_{x\in I_i} f(x)$$

$$\le\; \sum_{i=0}^{n}(a_{i+1}-a_i)\cdot\sup_{x\in I} f(x) \;=\; (b-a)\cdot\sup_{x\in I} f(x).$$

(3). Sei $(a_0^i,\dots,a_{n_i+1}^i)$ die entsprechende Zerlegung von I_i, die durch die Verfeinerung $\mathfrak{z}'$ von $\mathfrak{z}$ erzeugt wird, und es sei $I_{ij}=[a_j^i,a_{j+1}^i]$.
Analog wie im Beweis von (2) erhält man:

$$(a_{i+1}-a_i)\cdot\inf_{x\in I_i} f(x) \;\le\; \sum_{j=0}^{n_i}(a_{j+1}^i-a_j^i)\cdot\inf_{x\in I_{ij}} f(x) \qquad (\star)$$

und

$$(a_{i+1}-a_i)\cdot\sup_{x\in I_i} f(x) \;\ge\; \sum_{j=0}^{n_i}(a_{j+1}^i-a_j^i)\cdot\sup_{x\in I_{ij}} f(x). \qquad (\star\star)$$

Addiert man die Ungleichungen $(\star)$ bzw. $(\star\star)$ bezüglich i, dann erhält man die gewünschte Behauptung.
(4). Es sei $\mathfrak{z}'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, d.h., alle Unterteilungspunkte von $\mathfrak{z}_1$ und von $\mathfrak{z}_2$ sind auch Unterteilungspunkt von $\mathfrak{z}'$. Dann gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \le \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}). \qquad ❏$$

Bemerkung. Nach (2) ist die Menge der Untersummen und die Menge der Obersummen stets beschränkt. Dies gibt Anlaß zu folgender Definition: **9/2/8**

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*) **9/2/9**
Es sei f in I definiert und beschränkt.
Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I, und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I.

Bez.: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ bzw. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ oder auch

$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$ bzw. $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$.

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes*

(*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I.

$$\textbf{Bez.:} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Definition. (*Flächeninhalt*) 9/2/10

Sei f in $[a,b]$ definiert, beschränkt und nicht negativ.
Die (ebene) Punktmenge $M := \{(x,y) : a \le x \le b \text{ und } 0 \le y \le f(x)\}$ besitzt einen *Flächeninhalt* (der Größe A)

$\underset{\text{Df}}{=}$ f ist in $[a,b]$ integrierbar (und $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = A$).

Bemerkung. Aus Satz 9.5 (4) folgt sofort, daß $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$ 9/2/11

Beispiel. Wir diskutieren jetzt ein Beispiel dafür, daß das Unterintegral kleiner ist als das Oberintegral. 9/2/12

Dazu sei $I = [0,1]$ und $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 1, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Dann gilt für jede Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I und jedes Teilintervall $I_i = [a_i, a_{i+1}] \subseteq I$:

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = 2.$$

Folglich ist

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{=1} = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_0 = 1$$

und

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{=2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = 2.$$

Für eine beliebige Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I ist also stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = 1 < 2 = \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
Folglich ist auch

$$\underline{\int\limits_0^1} f(x)\,dx = 1 < 2 = \overline{\int\limits_0^1} f(x)\,dx.$$

Damit ist die Funktion f in I nicht integrierbar, und die entsprechende Punktmenge M besitzt keinen Flächeninhalt. (siehe auch Abb. 9.6)

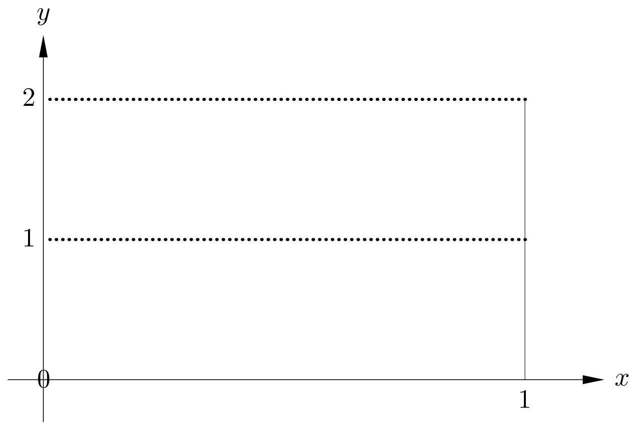

Abb. 9.6 Die Abbildung zeigt (symbolisch) die in der obigen Bemerkung definierte Funktion f mit $I = [0,1]$ und $x \in I$. Der dort betrachteten ebenen Punktmenge $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist kein Flächeninhalt zugeordnet.

Satz 9.6 *Ist* f *in* $I = [a,b]$ *definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes* $\varepsilon > 0$ **9/2/13**
ein $\delta > 0$, *so daß für jede Zerlegung* $\mathfrak{z}$ *von* I *mit* $d(\mathfrak{z}) < \delta$ *gilt:*

$$(1)\quad 0 \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \textit{und}$$

$$(2)\quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int\limits_a^b f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Beweis. (1). Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Unterintegrals existiert eine Zerlegung **9/2/14**
$\mathfrak{z}' = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ von I, so daß

$$0 \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da f in I beschränkt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(x)| < c$ für alle $x \in I$.
Es sei

$$\delta := \min\left\{d(\mathfrak{z}'), \frac{\varepsilon}{6c(n+1)}\right\}$$

und $\mathfrak{z}$ eine beliebige Zerlegung von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$. Wir zeigen:

$$0 \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

Es sei $\mathfrak{z}''$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$. Dann ist $0 \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}'')$, also gilt

$$0 \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $d(\mathfrak{z}) < \delta < d(\mathfrak{z}')$ enthält jedes Intervall von $\mathfrak{z}$ höchstens einen Zerlegungspunkt von $\mathfrak{z}'$ als inneren Punkt. Die durch $\mathfrak{z}$ entstehenden Intervalle werden in zwei Klassen zerlegt:

$M_1 :=$ Intervalle von $\mathfrak{z}$, die kein a_i von $\mathfrak{z}'$ als inneren Punkt enthalten,

$M_2 :=$ Intervalle von $\mathfrak{z}$, die ein a_i von $\mathfrak{z}'$ als inneren Punkt enthalten.

Mit der Zerlegung $\mathfrak{z}''$ erhält man die folgenden beiden Intervallmengen:

$M_1' :=$ Intervalle von $\mathfrak{z}''$, die schon zu M_1 gehören,

$M_1' :=$ Intervalle von $\mathfrak{z}''$, die nicht zu M_1 gehören.

In der Differenz $\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ liefern die Intervalle aus M_1 (diese gehören auch zu M_1'') keinen Beitrag (die entsprechenden Summanden heben sich gegenseitig auf). Es bleiben noch die Summanden zu berücksichtigen, die durch die Intervalle aus M_2 bzw. M_2'' entstehen.
M_2 enthält höchstens $(n+1)$ Intervalle und M_2'' höchstens $2(n+1)$.
Wegen $\left|(c-d)\cdot \inf\limits_{x\in[c,d]} f(x)\right| < \delta\cdot c$, falls $|c-d| < \delta$, erhält man

$$|\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})| \le 3(n+1)c\cdot\delta \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) zeigt man analog. ❏

Definition. (*ausgezeichnete Zerlegungsfolge*) **9/2/15**

Es sei $(\mathfrak{z}_\nu)_{\nu=0,1,2,\ldots}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I.
$(\mathfrak{z}_\nu)$ heißt *ausgezeichnete Zerlegungsfolge* von I
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $\lim\limits_{\nu\to\infty} d(\mathfrak{z}_\nu) = 0$.

Satz 9.7 *Sei f in $I = [a,b]$ definiert und beschränkt und $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I. Dann gilt:* **9/2/16**

(1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

(2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

(3) *Ist f in I integrierbar, dann sind die Limites in* (1) *und* (2) *gleich* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis. (1). Es ist zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein ν_0, so daß für jedes $\nu \geq \nu_0$ gilt: **9/2/17**

$$\left| \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \right| < \varepsilon.$$

Nach Satz 9.6 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\left| \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \right| < \varepsilon$, falls $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$. Nach Voraussetzung ist $(d(\mathfrak{z}_\nu))$ eine Nullfolge, folglich existiert ein ν_0, so daß $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_0$. Damit leistet ν_0 für die Behauptung (1) das Verlangte.

(2) beweist man analog.

(3) ist eine triviale Folgerung aus (1) und (2). ❑

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Der Umgang mit der Definition der Integrierbarkeit ist ein wenig schwerfällig. Daher wäre es sehr hilfreich, ein gut anwendbares Integrierbarkeitskriterium zu haben. Ein solches Kriterium ist mit dem folgenden Satz gegeben. **9/3/0**

Satz 9.8 (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*) **9/3/1**
Sei f in $I = [a,b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt: f ist in I integrierbar gdw für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I existiert, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Beweis. ($\longrightarrow$) Sei f in I integrierbar, also $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. **9/3/2**
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.6 existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\mathfrak{z}$ mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, dann erhält man:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \;+\; \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung Unter- und Oberintegral übereinstimmen, ergibt sich
$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ sogar für jede Zerlegung $\mathfrak{z}$ mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$.

($\longleftarrow$) Annahme: f ist in I nicht integrierbar. Also

$$0 < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert für dieses $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I, so daß
$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. Folglich ist

$$\varepsilon = \int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon. \quad ↯! \qquad \square$$

9/3/3

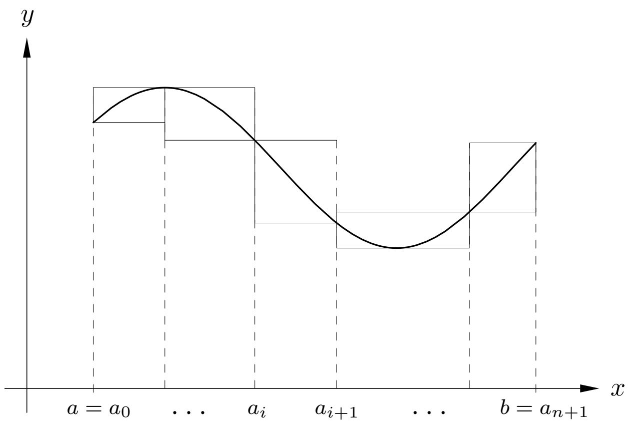

Abb. 9.7 Die Summe der Flächeninhalte der "durchgezogenen" Rechtecke gibt die Differenz zwischen Ober- und Untersumme von f bei der betrachteten Zerlegung an.

Definition. (*Zwischensumme*) **9/3/4**

Es sei f in I definiert, $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I, und für jedes $i = 1, \ldots, n$ sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.
Dann nennt man $\tau = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$, und $S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum\limits_{i=0}^{n}(a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi)$ heißt *Zwischensumme* von f bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$ und dem Zwischenstellensystem τ.

Bemerkung. Ist f in I definiert und beschränkt, dann gilt für $\xi \in [a_i, a_{i+1}] := I_i$ **9/3/5**
stets $\inf\limits_{x \in I_i} f(x) \le f(\xi) \le \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$ und somit auch

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \le S_f(\mathfrak{z}, \tau) \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

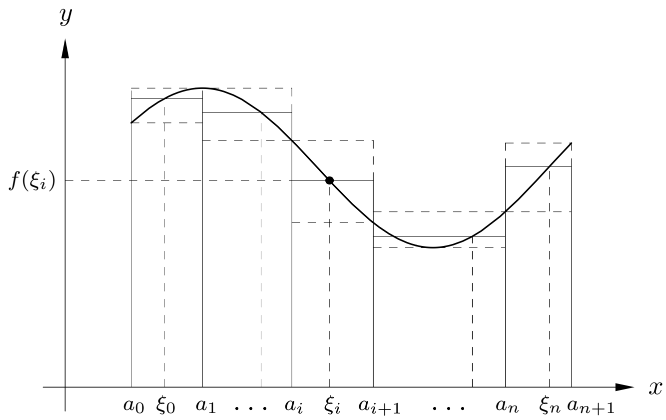

Abb. 9.8 Die Summe der Flächeninhalte der hervorgehobenen Rechtecke bildet die Zwischensumme von f bei der angegebenen Zerlegung $\mathfrak{z}$ und dem Zwischenstellensystem $\tau := (\xi_0, \ldots, \xi_n)$. Die Abbildung zeigt auch, daß die Zwischensumme zwischen der Unter- und der Obersumme liegt.

Satz 9.9 *Es sei* f *in* $I = [a, b]$ *definiert und beschränkt. Dann gilt:* **9/3/6**
f *ist in* I *integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge* $(\mathfrak{z}_\nu)$ *und jede Folge* (τ_ν) *von zugehörigen Zwischenstellensystemen* τ_ν *gilt:*

Es existiert $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ *(und der Limes ist gleich dem Integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*)*

Beweis. $(\longrightarrow)$ Nach Voraussetzung ist $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx.$ **9/3/7**

Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(\mathfrak{z}_\nu)$ gilt nach Satz 9.7:

$$\lim_{\nu\to\infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

und

$$\lim_{\nu\to\infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ist (τ_ν) eine zu $(\mathfrak{z}_\nu)$ gehörende Folge von Zwischenstellensystemen, dann ist nach der obigen Bemerkung stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

$(\longleftarrow)$ Angenommen, f ist unter der gemachten Voraussetzung nicht integrierbar, also

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Sei $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine beliebige ausgezeichnete Zerlegungfolge von I, dann konvergiert $S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ für jedes zugehörige Zwischenstellensystem (τ_ν). Wir konstruieren jetzt ein Zwischenstellensystem, so daß die entsprechende Folge der Zwischensummen nicht konvergiert, und dies liefert uns den gewünschten Widerspruch.

Es sei $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$, $\nu \geq 0$ und $I_{i\nu} = [a_i^\nu, a_{i+1}^\nu]$.
Offenbar lassen sich $\inf\limits_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ und $\sup\limits_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ beliebig gut durch Funktionswerte $f(\xi_i^\nu)$ annähern. Für jedes ν konstruieren wir ein τ_ν wie folgt:
Ist ν gerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $f(\xi_i^\nu) - \inf\limits_{x \in I_{i\nu}} f(x) < \dfrac{1}{n_\nu(b-a)}$, und ist ν ungerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $\sup\limits_{x \in I_{i\nu}} f(x) - f(\xi_i^\nu) < \dfrac{1}{n_\nu(b-a)}$.
Auf diese Weise erhält man für jedes ν ein Zwischenstellensystem $\tau_\nu = (\xi_0^\nu, \dots, \xi_{n_\nu}^\nu)$.
Für gerade ν gilt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) &= \sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \Big(\underbrace{f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x)}_{< \frac{1}{n_\nu(b-a)}} \Big) \\ &< \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{= b-a} \cdot \frac{1}{n_\nu(b-a)} = \frac{1}{n_\nu}. \end{aligned}$$

Analog erhält man $0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) < \dfrac{1}{n_\nu}$ für ungerade ν.
Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{\nu \to \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) := c$.
Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu))$ gegen c, insbesondere konvergieren die Teilfolgen mit den geraden bzw. mit den ungeraden Indizes gegen c. Wir haben also insgesamt

$$\lim_{\nu \to \infty} \Big(S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \Big) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \Big(\overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \Big) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für ungerade } \nu,$$

und somit gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \quad \text{und}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Schließlich erhält man mit Hilfe von Satz 9.7:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \lim_{\nu \to \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \lim_{\nu \to \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Das widerspricht der Annahme. Folglich ist f in I integrierbar. ❏

Bemerkung. Nach dem Satz 9.9 kann man das Riemann-Integral auch als Limes einer **9/3/8**
Folge von Zwischensummen definieren.

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.10 *Ist f in I stetig, dann ist f in I integrierbar.* **9/4/0**

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Riemann-Kriteriums. **9/4/1**
Nach Voraussetzung ist f stetig in I, folglich ist f dort auch gleichmäßig stetig.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.
Sei jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig, aber

$$0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zu diesem $\varepsilon' > 0$ existiert auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f in I ein $\delta' > 0$, so daß für jedes $x_1, x_2 \in I$ gilt:

Wenn $|x_1 - x_2| < \delta'$, so $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon'$.

Sei jetzt $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I, so daß $\mathrm{d}(\mathfrak{z}) < \delta'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{<\,\delta'} \cdot \underbrace{\left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)}_{\leq\,\varepsilon'} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \varepsilon' \\
&= \varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i)}_{=\,b-a} \\
&= \varepsilon'(b-a) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar. ❏

Satz 9.11 *Ist f in I definiert und beschränkt und besitzt f in I höchstens endlich* **9/4/2**
viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in I integrierbar.

Beweis. Der Beweis erfolgt induktiv über die Anzahl k der Unstetigkeitsstellen von **9/4/3**
f in dem betrachteten Intervall.
Ist $k = 0$, dann ist f in I stetig und damit nach Satz 9.10 integrierbar.
Für k gelte die Behauptung bereits.

Habe f jetzt $k+1$ Unstetigkeitsstellen in I.
Sei x_0 eine Unstetigkeitsstelle mit $a < x_0 < b$. (Für $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ vereinfacht sich der Beweis, man führt ihn aber analog.)
Wir wählen $a', b' \in I = [a,b]$, so daß $a' < x_0 < b'$ und $I' = [a', b']$ keine weitere Unstetigkeitsstelle von f enthält. Nach Voraussetzung ist f in I beschränkt. Folglich existiert eine Konstante c, so daß $|f(x)| \le c$, insbesondere gilt dann

$$\sup_{x\in I'} f(x) - \inf_{x\in I'} f(x) \le 2c.$$

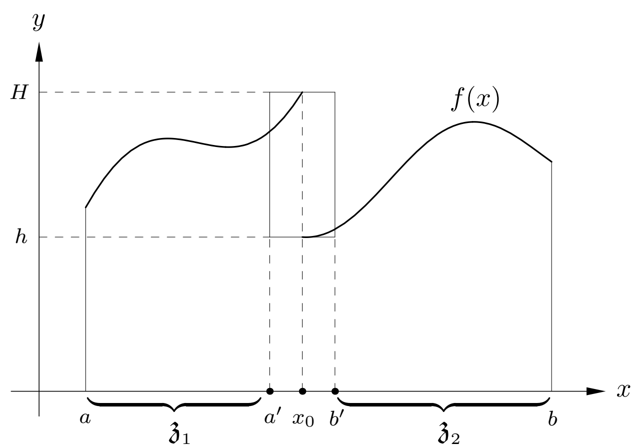

Abb. 9.9 Wählt man a', b' hinreichend dicht bei x_0, dann wird das durch $[a', b'] \times [h, H]$ bestimmte Rechteck „klein“, wobei
$h := \inf_{x\in[a',b']} f(x)$ und
$H := \sup_{x\in[a',b']} f(x)$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von I, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.
Dazu wählen wir a', b' so dicht bei x_0, daß

$$b' - a' < \frac{1}{2c} \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt

$$(b' - a') \cdot \Big(\sup_{x\in I'} f(x) - \inf_{x\in I'} f(x) \Big) \le (b' - a') \cdot 2c < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seien nun $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ Zerlegungen von $[a, a']$ bzw. von $[b', b]$, so daß

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es solche Zerlegungen, da f in $[a, a']$ und in $[b', b]$ jeweils höchstens k Unstetigkeitsstellen besitzt. Sei $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ und $\mathfrak{z}_2 = (b_0, \dots, b_{m+1})$, dann ist offenbar $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1}, b_0, \dots, b_{m+1})$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$, und es gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) + (b' - a') \cdot \Big(\sup_{x\in I'} f(x) - \inf_{x\in I'} f(x) \Big) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar. ❑

Satz 9.12 *Ist f in I definiert und monoton, dann ist f in I integrierbar.* **9/4/4**

Beweis. (mit Hilfe des Riemann-Kriteriums) Sei $\varepsilon > 0$. Wir beweisen den Satz für monoton wachsendes f, für monoton fallende Funktionen erfolgt der Beweis analog. **9/4/5**
Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ mit $a_i = a + \frac{b-a}{n+1} \cdot i$. Dann ist offenbar $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n+1}$. Die Teilintervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ sind also alle gleich lang. Da f monoton wächst, ist

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = f(a_i) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = f(a_{i+1}).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{=\frac{b-a}{n+1}} \cdot \Big(\underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{=f(a_{i+1})} - \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{=f(a_i)} \Big) \\
&= \frac{b-a}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} \Big(f(a_{i+1}) - f(a_i) \Big) \\
&= \frac{b-a}{n+1} \cdot \Big(f(a_{n+1}) - f(a_0) \Big) \\
&= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n+1} \\
&< \varepsilon, \quad \text{falls } n \text{ hinreichend groß gewählt wird.}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß f in I integrierbar ist. ❑

Beispiele.

1. Mit dem letzten Satz lassen sich Beispiele für Funktionen angeben, die in einem Intervall sogar unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen und trotzdem integrierbar sind (vgl. Abb. 9.10). **9/4/6/1**

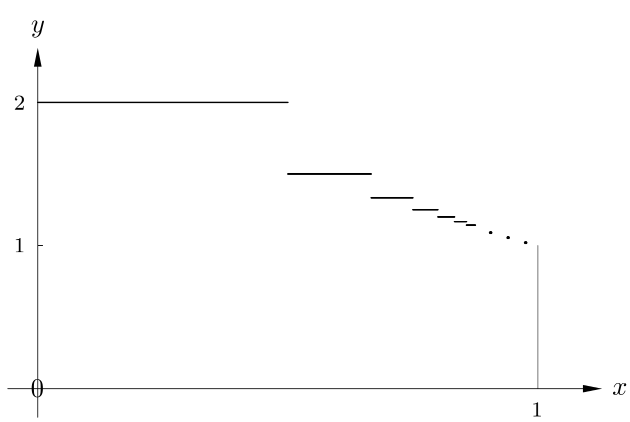

Abb. 9.10 Die Abbildung zeigt eine monoton fallende „*Treppenfunktion*“, wie sie in der Bemerkung betrachtet wird.

Sei $I = [0, 1]$, (c_n) eine streng monoton wachsende Folge mit $c_0 = 0$ und $c_n \to 1$ (z.B. $c_n = \frac{n}{n+1}$), und $f(x)$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - c_n, & \text{für } c_n \leq x < c_{n+1} \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

f ist offenbar in jedem Punkt c_n unstetig, aber in I monoton fallend und daher integrierbar.

2. (vgl. dazu Literaturangabe [3], Bd. II, Nr 300, Beispiele und Ergänzungen.) **9/4/6/2**

Sei $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n, m \text{ teilerfremd}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational}. \end{cases}$

Wir betrachten f in dem Intervall $I = [0, 1]$.
Dann ist f in allen irrationalen Punkten aus I stetig und in allen rationalen unstetig (vgl. Aufgabe 6, Kapitel 5). Folglich liegen die Unstetigkeitsstellen dicht in dem Intervall. Trotzdem ist die Funktion in I integrierbar.

Wir wenden uns nun der bestimmten Integration zusammengesetzter Funktionen zu. **9/4/7**

Satz 9.13 *Seien f und g in I integrierbar. Dann gilt:* **9/4/8**

(1) *Ist $h(x) = c$ für alle $x \in I$, so ist* $\int\limits_a^b h(x)\, dx = c(b-a)$.

(2) *Sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$ in I integrierbar, und es ist*

$$\int\limits_a^b \Big(c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)\Big)\, dx = c_1 \int\limits_a^b f(x)\, dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

(3) *$f \cdot g$ ist in I integrierbar.*

(4) *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und ist $\frac{1}{g}$ beschränkt in I, dann ist $\frac{1}{g}$ in I integrierbar.*

(Zusammen mit (3) erhält man sofort die Integrierbarkeit von $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ in I).

(5) *$|f|$ ist in I integrierbar, und es ist* $\left| \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$.

Beweis. (1) und (2) beweist man sehr leicht mit Hilfe von Satz 9.9 unter Benutzung von Zwischensummen und entsprechenden Grenzwertbetrachtungen. **9/4/9**

(3). (Beweis mit Hilfe des Riemann-Kriteriums)
Wir betrachten den Fall: $f(x),\, g(x) \geq 0$ in I.
Hierauf lassen sich die restlichen Fälle zurückführen. Denn nach Voraussetzung sind f und g in I beschränkt, folglich gibt es eine Konstante d, so daß

$$f_1(x) := f(x) + d \geq 0 \quad \text{und} \quad g_1 := g(x) + d \geq 0 \text{ in } I.$$

Wenn die Behauptung für nicht-negative Funktionen schon gilt, dann ist $f_1 \cdot g_1$ in I integrierbar, und es ist

$$f_1 \cdot g_1 = (f+d) \cdot (g+d) = f \cdot g + d \cdot (f+g) + d^2,$$

und damit ist

$$f \cdot g = f_1 \cdot g_1 - d \cdot (f+g) + d^2.$$

Nach (1) und (2) ist $f \cdot g$ dann in I für beliebige f, g integrierbar.

Wir beweisen jetzt die Behauptung für nicht-negative Funktionen. Es sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$, so daß $\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Für eine beliebige Zerlegung $\mathfrak{z}$ mit $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ gilt:

$$\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\Big(\sup_{x \in I_i} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) - \inf_{x \in I_i} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) \Big)}_{:=(\star)}.$$

Wegen $f(x), g(x) \geq 0$ ist

$$\sup_{x \in I_i} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) \leq \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{:=H_{fi}} \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} g(x)}_{:=H_{gi}}$$

und

$$\inf_{x \in I_i} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) \geq \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{:=h_{fi}} \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} g(x)}_{:=h_{gi}}.$$

Da f, g in I beschränkt sind, existiert ein $c > 0$, so daß $H_{fi}, h_{gi} \leq c$.
Folglich ist

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in I_i} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) - \inf_{x \in I_i} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) &\leq H_{fi} \cdot H_{gi} - h_{fi} \cdot h_{gi} \\
&= H_{fi} \cdot H_{gi} - H_{fi} \cdot h_{gi} + H_{fi} \cdot h_{gi} - h_{fi} \cdot h_{gi} \\
&= \underbrace{H_{fi}}_{\leq c} \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + \underbrace{h_{gi}}_{\leq c} \cdot (H_{fi} - h_{fi}) \\
&\leq c \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + c \cdot (H_{fi} - h_{fi}).
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\star) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \Big(c \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + c \cdot (H_{fi} - h_{fi}) \Big) \\
&= c \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i)(H_{gi} - h_{gi})}_{=\overline{S}_g(\mathfrak{z}) - \underline{S}_g(\mathfrak{z})} + c \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i)(H_{fi} - h_{fi})}_{=\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z})}.
\end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Integrierbarkeitskriterium existieren für f und g Zerlegungen $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ von I, so daß $\overline{S}_g(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_g(\mathfrak{z}_1) < \dfrac{\varepsilon}{2c}$ und $\overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \dfrac{\varepsilon}{2c}$.

Wählt man jetzt $\mathfrak{z}$ als gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, dann ist nach den obigen Betrachtungen

$$\overline{S}_{f\cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f\cdot g}(\mathfrak{z}) < c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.$$

(4) und (5) beweist man ebenfalls mit dem Riemannkriterium durch geeignete Abschätzungen. Der Beweis soll hier weggelassen werden. ❏

Satz 9.14 *Ist f in $[a,b]$ integrierbar und $a < c < b$, dann ist f in $[a,c]$ und in* 9/4/10
$[c,b]$ integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Riemannkriterium existiert eine Zerlegung 9/4/11
$\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ von $[a,b]$, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. O.B.d.A. sei c ein Unterteilungspunkt von $\mathfrak{z}$ (anderenfalls betrachtet man die Verfeinerung von $\mathfrak{z}$, die durch Hinzunahme des Punktes c entsteht). Sei $c = a_k$ und seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \ldots, a_k)$ und $\mathfrak{z}_2 = (a_k, \ldots, a_{n+1})$. Dann sind $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. von $[c,b]$. Damit erhält man

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \varepsilon$$

und damit auch

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Folglich ist f in $[a,c]$ und in $[c,b]$ integrierbar.

Es sei nun $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $[a,b]$, und in jeder Zerlegung $\mathfrak{z}_\nu$ komme c als Unterteilungspunkt vor. Weiterhin seien $\mathfrak{z}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{z}_{\nu 2}$ analog aus $\mathfrak{z}_\nu$ gebildet, wie $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ aus $\mathfrak{z}$. Dann sind $\mathfrak{z}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{z}_{\nu 2}$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. von $[c,b]$. Mit Hilfe von Satz 9.7 erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \Big(\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1}) + \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2})\Big) \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1}) + \lim_{\nu\to\infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2}) \\
&= \int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx + \int_{\underline{c}}^{b} f(x)\,dx \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$ ❏

Korollar. *Sei* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$ *und* f *in* $I = [a, b]$ *integrierbar, dann ist* f *in jedem Teilintervall* $[a_i, a_{i+1}] \subseteq I$ *integrierbar, und es ist* **9/4/12**

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Beweis. Den Beweis führt man leicht (mit Hilfe von Satz 9.14) induktiv über n. ❑ **9/4/13**

Definition. Sei $a < b$ und f in $[a, b]$ integrierbar. Dann definieren wir **9/4/14**

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx \underset{\text{Df}}{\equiv} -\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_a^a f(x)\,dx \underset{\text{Df}}{\equiv} 0.$$

Folgerung. *Ist* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$ *und* f *in* $[a, b]$ *integrierbar, dann ist* **9/4/15**

$$\sum_{i=0}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx + \int\limits_b^a f(x)\,dx = 0.$$

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 *Sei* $a < b$, *und seien* f, g *in* I *integrierbar. Dann gilt:* **9/5/0**

(1) *Wenn* $f(x) \geq 0$ *für jedes* $x \in I$, *so ist* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(2) *Wenn* $f(x) \leq g(x)$ *für jedes* $x \in I$, *so ist* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Beweis. (1). Sei $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I und $I_i = [a_{i+1}, a_i]$. Dann ist wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf\limits_{x \in I_i} f(x) \geq 0$ auch **9/5/1**

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \geq 0.$$

(2). Wenn $f(x) \leq g(x)$, so $0 \leq g(x) - f(x)$ für jedes $x \in I$. Nach (1) gilt dann

$$0 \leq \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

also auch

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx. \qquad ❏$$

Bemerkung. *Ist* $a < b$, f *stetig und nicht negativ in* $I = [a,b]$ *und* $\int_a^b f(x) = 0$, *so ist* $f(x) = 0$ *für jedes* $x \in I$. 9/5/2

Beweis. Gäbe es ein $c \in I$, so daß $f(c) > 0$, so wäre auch $g(x) := f(x) - \frac{f(c)}{2}$ für $x = c$ positiv. Da mit f auch g stetig ist, existiert eine ε-Umgebung von c, so daß g in $U_\varepsilon(c)$ ebenfalls positiv ist. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung, so daß $c - \varepsilon$ und $c + \varepsilon$ Zerlegungspunkte sind (ε hinreichend klein; für $c = a$ bzw. $c = b$ betrachtet man die entsprechende rechts- bzw. linksseitige Umgebung von c), etwa $c - \varepsilon = a_k$ und $c + \varepsilon = a_{k+1}$, dann ist $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ in $[a_k, a_{k+1}]$, also auch 9/5/3

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf_{x \in I_k} f(x) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Damit ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) > 0\,. \qquad ❏$$

Satz 9.16 (*Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung*) 9/5/4

Sei $a < b$, *seien* f, g *in* $I = [a,b]$ *integrierbar, und* g *wechsle in* I *nicht das Vorzeichen* (d.h., $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in I$).
Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ *mit* $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$, *so daß*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \;=\; \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ (den verbleibenden Fall beweist man analog). 9/5/5
Dann gilt für $\inf_{x \in I} f(x) := \mu_1$ und für $\sup_{x \in I} f(x) := \mu_2$ offenbar

$$\mu_1 \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \mu_2 \cdot g(x)$$

und somit nach Satz 9.15

$$\mu_1 \cdot \int_a^b g(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \;\leq\; \mu_2 \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Für $A := \int_a^b g(x)\,dx$ und $B := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ist $\mu_1 A \leq B \leq \mu_2 A$ und somit $\mu_1 \leq \frac{B}{A} := \mu \leq \mu_2$, falls $A \neq 0$; für $A = 0$ leistet $\mu = 0$ das Verlangte. ❏

Korollar. (*1. Mittelwertsatz der Integralrechnung*) **9/5/6**
Voraussetzungen über a, b, f, g, μ_1, μ_2 *wie im Satz* 9.16. *Dann gilt*:

(1) *Ist* $g = 1$ *dann gibt es ein* μ *mit* $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, *so daß* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a)$.

(2) *Ist* f *in* I *stetig, dann gibt es ein* $\xi \in I$, *so daß*
$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. (1) ist trivial. **9/5/7**
(2). Da f in I stetig ist, nimmt f die Werte $\mu_1 = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ und $\mu_2 = \sup\limits_{x \in I} f(x)$ als Funktionswerte an. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann für μ mit $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ auch ein $\xi \in I$, so daß $\mu = f(\xi)$. Damit gilt die Behauptung. ❏

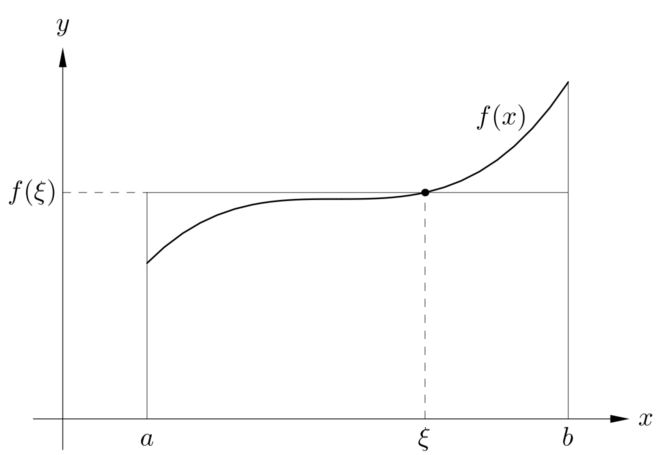

Abb. 9.11 Die Abbildung zeigt einen Spezialfall des Korollars, wobei in dem Teil (2) die Funktion g in I konstant 1 gewählt wurde. Die durch das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bestimmte Fläche der Punktmenge $M = \{(x,y) : x \in I,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist dann flächengleich mit dem Rechteck der Breite $b-a$ und der Höhe $f(\xi)$.

Wir werden jetzt mit Hilfe des bestimmten Integrals mit veränderlicher oberer Grenze neue Funktionen definieren. Dazu sei zunächst f eine in dem Intervall I definierte und beschränkte Funktion. Dann ist offenbar für jedes $x \in I$ die Funktion f in jedem Teilintervall $[a,x] \subseteq I$ bestimmt integrierbar. Damit ist jedem $x \in I$ durch $\int_a^x f(t)\,dt$ ein bestimmter Wert $F(x)$ zugeordnet, d.h., durch $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist in I eine Funktion definiert. Wir leiten jetzt einige Eigenschaften dieser Funktion her. **9/5/8**

Satz 9.17 *Ist* f *in* I *integrierbar und* $x \in I$, *dann ist die durch* $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *definierte Funktion* F *in* I *stetig.* **9/5/9**

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß f in jedem Punkt $c \in I$ stetig ist, d.h., wenn **9/5/10**

$x \to c$, so $F(x) \to F(c)$. Es ist

$$\begin{aligned} F(x) - F(c) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_c^a f(t)\,dt \\ &= \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \mu_{x,c} \cdot (x-c). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung, wobei $\mu_{x,c}$ zwischen dem Infimum und dem Supremum der Funktion f in dem Intervall $[c,x]$ bzw. in $[x,c]$ liegt. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, also auch beschränkt, folglich muß auch $\mu_{x,c}$ in I beschränkt sein.
Wenn nun $x \to c$, so gilt auch $\mu_{x,c} \cdot (x-c) \to 0$, und damit auch $F(x) - F(c) \to 0$. Folglich ist F in I stetig. ❏

Satz 9.18 *Ist f in I stetig und $x \in I$, dann ist die durch $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ definierte Funktion F in I differenzierbar, und es ist $F' = f$* **9/5/11**

(d.h., F ist eine Stammfunktion von f in I).

Beweis. Es gelte $x, c \in I$ und $x \neq c$. Dann erhält man mit Hilfe des 1. Mittelwert- **9/5/12**
satzes der Integralrechnung (Korollar (2)):

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(c)}{x-c} &= \frac{1}{x-c} \cdot \Big(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \Big) \\ &= \frac{1}{x-c} \cdot \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{x-c} \cdot f(\xi_x) \int_c^x dt, \qquad \text{für ein } \xi_x \text{ zwischen } c \text{ und } x \\ &= \frac{1}{x-c} \cdot f(\xi_x) \cdot (x-c) \\ &= f(\xi_x). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f in c stetig. Wegen $x \to c$ und damit auch $\xi_x \to c$ gilt: $f(\xi_x) \to f(c)$. Folglich erhält man

$$\frac{F(x) - F(c)}{x-c} \to f(c) \; .$$

Daher ist $F'(c) = f(c)$ für jedes $c \in I$. ❏

Bemerkung. Es soll noch einmal hervorgehoben werden, daß eine in I stetige Funk- **9/5/13**

tion dort eine Stammfunktion besitzt, und $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist die Stammfunktion von f in I, die an der Stelle $x = a$ null wird (vgl. Abb. 9.12)

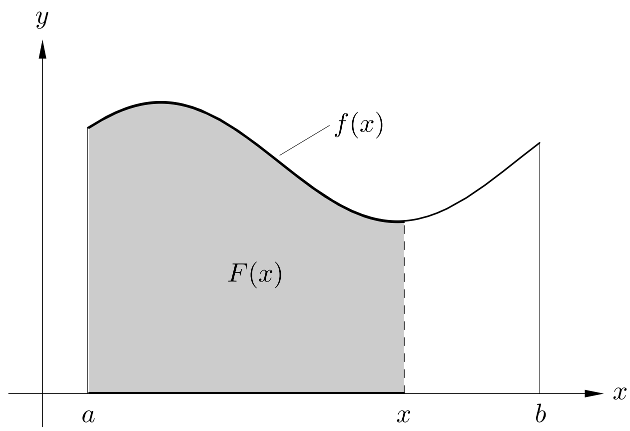

Abb. 9.12 Jedem $x \in I = [a,b]$ wird durch $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ein Wert zugeordnet, der durch den Flächeninhalt der schattierten Fläche dargestellt ist. Hierdurch wird auch der Zusammenhang zwischen f und F sichtbar.

Jetzt sind wir in der Lage, den folgenden wichtigen Satz zu formulieren, mit dessen Hilfe man bestimmte Integrale berechnen kann, wenn man eine Stammfunktion der zu integrierenden Funktion schon kennt.

Satz 9.19 (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*) **9/5/14**
Ist f in $[a,b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f in $[a,b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f und $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dann **9/5/15**
ist $F_0(a) = 0$ und $\int_a^b f(t)\,dx = F_0(b) = F_0(b) - F_0(a)$.
Da F und F_0 Stammfunktionen der gleichen Funktion f in einem Intervall sind, unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante, also $F_0(x) = F(x) + c$. Dann gilt

$$F_0(b) - F_0(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

Damit gilt die Behauptung. ❑

Bez.: $F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b := F(x)\Big|_a^b.$

Bemerkung. Um also das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für eine stetige Funktion **9/5/16**

berechnen zu können, genügt es, eine Stammfunktion F von f zu kennen und die entsprechnede Differenz $F(b) - F(a)$ zu berechnen.

Unstetige Funktionen können bestimmt integrierbar sein, ohne eine Stammfunktion zu besitzen (vgl. Aufgabe 13, Kap. 9).

Andererseits gibt es Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht bestimmt integrierbar sind (vgl. Aufgabe 14, Kap. 9).

Bestimmte und unbestimmte Integrierbarkeit sind also unabhängig voneinander.

Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß eine Funktion f in dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, wenn f in $[a, b]$ differenzierbar und die Ableitung von f dort stetig ist.
Wir wollen uns jetzt mit der partiellen Integration und der Substitutionsregel bei bestimmten Integralen befassen.

Satz 9.20 (*partielle Integration*) **9/5/17**

Sind f und g in $[a, b]$ stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis. Offenbar ist mit f und g auch $f \cdot g$ in $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Folglich ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f'g + fg'$. Aufgrund der Stetigkeit von f' und g' sind auch $f' \cdot g$, $f \cdot g'$ und $f' \cdot g + f \cdot g'$ stetig. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: **9/5/18**

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b \Big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\Big)\,dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Also

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \qquad \square$$

Satz 9.21 (*Substitutionsregel*) **9/5/19**

Ist f in $[a, b]$ stetig, g in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t)\,dt.$$

Ist außerdem g injektiv, also $\alpha = g^{-1}(\alpha)$ und $\beta = g^{-1}(b)$, dann ist

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f; sie existiert nach Satz 9.18. Dann ist offenbar $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))$ in $[\alpha, \beta]$. Außerdem ist $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig. Folglich gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **9/5/20**

$$\begin{aligned} \int\limits_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= [F(g(x))]_\alpha^\beta \\ &= F(g(\beta)) - F(g(\beta)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int\limits_a^b f(t)\,dt. \qquad ❏ \end{aligned}$$

Satz 9.22 (*2. Mittelwertsatz der Integralrechnung*) **9/5/21**

Ist f in $[a,b]$ monoton und differenzierbar und sind f', g in $[a,b]$ stetig, dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so daß $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\cdot\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\cdot\int\limits_\xi^b g(x)\,dx.$

Beweis. Ist f konstant, dann ist die Behauptung trivial. **9/5/22**

Sei nun f nicht konstant und o.B.d.A. sei f in $[a,b]$ monoton wachsend, folglich ist $f(a) < f(b)$. (Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog.) Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(c) > 0$ für wenigstens ein $c \in [a,b]$.

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Bemerkung zum Satz 9.15 und folgt

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) > 0.$$

Es sei jetzt $G(x) := \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Nach Satz 9.18 ist G in $[a,b]$ differenzierbar und $G' = g$. Mit Hilfe der partiellen Integration (Satz 9.20) erhält man

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; f(x)G(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)G(x)\,dx. \qquad (\star)$$

Nach dem Korollar zum erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so daß

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)G(x)\,dx &= G(\xi)\cdot\int_a^b f'(x)\,dx \\
&= G(\xi)\cdot\Big(f(b)-f(a)\Big) \\
&= f(b)\cdot G(\xi) - f(a)\cdot G(\xi). \qquad (\star\star)
\end{aligned}
$$

Wegen $G(a) = 0$ und $G(b) - G(\xi) = \int_\xi^b g(x)\,dx$ gilt nach $(\star)$ und $(\star\star)$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= f(b)G(b) - f(a)G(a) - f(b)G(\xi) + f(a)G(\xi) \\
&= f(a)G(\xi) + f(b)\cdot\Big(G(b) - G(\xi)\Big) \\
&= f(a)\cdot\int_a^\xi g(x\,dx) + f(b)\cdot\int_\xi^b g(x)\,dx. \qquad \square
\end{aligned}
$$

9.6 Volumen von Rotationskörpern

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Volumens eines sogenannten *Rotationskörpers* **9/6/0**
zu. Zunächst soll aber definiert werden, was unter einem solchen Körper zu verstehen ist.

Dazu sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei f eine in I definierte und integrierbare Funktion, die in dem Intervall nicht negativ wird. Dann bestimmt die Punktmenge

$$M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bekanntlich eine Fläche. Läßt man nun diese Fläche um die x-Achse rotieren, dann entsteht eine *Rotationsfigur* oder ein *Rotationskörper* (vgl. Abb. 9.13).

Wir interessieren uns nun für die Frage, ob man diesem Rotationskörper in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zuschreiben kann, und wie man gegebenenfalls dieses Volumen definieren und berechnen könnte.

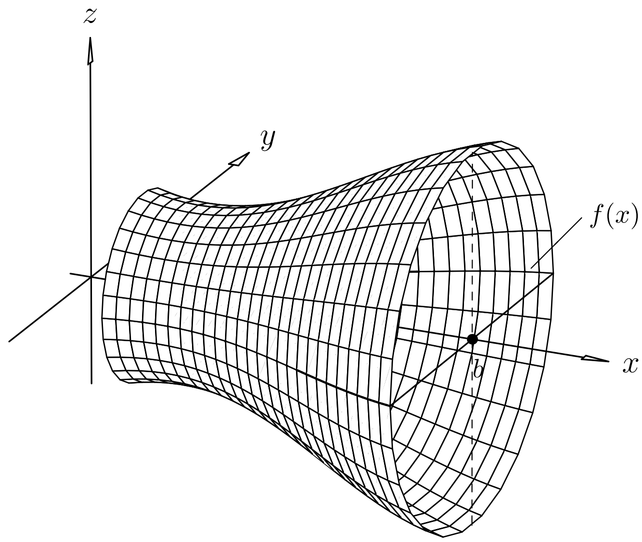

Abb. 9.13 Auf der x-Achse sei ein Intervall $[a, b]$ gegeben, und in diesem Intervall sei eine nicht-negative Funktion $f(x)$ definiert (a ist hier verdeckt). f wird in der (x, y)-Ebene betrachtet. Läßt man f um die x-Achse rotieren, dann entsteht im $\mathbb{R}^3$ eine Rotationsfigur.

Das Problem ist aufgeworfen, wir versuchen es zu lösen.
Dazu sei $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I. Parallele Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die zur x-Achse senkrecht stehen und durch die jeweiligen Zerlegungspunkte auf der x-Achse gehen, schneiden aus der Rotationsfigur Kreisscheiben heraus. Das angenäherte Volumen der Kreisscheibe, die durch die Zerlegungspunkte a_i und a_{i+1} bestimmt wird, kann durch einen geeigneten Kreiszylinder angegeben werden. Dazu sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ beliebig. Dann ist durch $(a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$ das Volumen des entsprechenden Zylinders mit der Höhe $h = a_{i+1} - a_i$ und dem Radius $f(\xi_i)$ gegeben. ξ_i ist eine Zwischenstelle in $[a_i, a_{i+1}]$ (vgl. Abb. 9.8). Entsprechend dieser Überlegung ist durch

$$\tilde{V} = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$$

das angenäherte Volumen der gesamten Rotationsfigur bestimmt. Diese Summe ist offensichtlich eine Zwischensumme der Funktion $\pi \cdot f^2(x)$ bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$ und dem Zwischenstellensystem $\tau = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, folglich ist auch πf^2 in I integrierbar.
Betrachtet man jetzt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(\mathfrak{z}_\nu)$ von I und eine Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen, dann existiert $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$, und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b \pi f^2(x)\, dx$.
Daher definiert man das Volumen V der Punktmenge M wie folgt:

$$V \underset{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \to \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Beispiele.

(1). Ist f konstant, $f = r$, dann erhält man mit dieser Formel den Rauminhalt eines Kreiszylinders mit der Höhe $b - a$ und dem Radius r. **9/6/1/1**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b r^2\,dx = \pi r^2(b-a) = r^2\pi h.$$

(2). Es sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $I = [0,1]$. Dann ist das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers gegeben durch **9/6/1/2**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 x\,dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

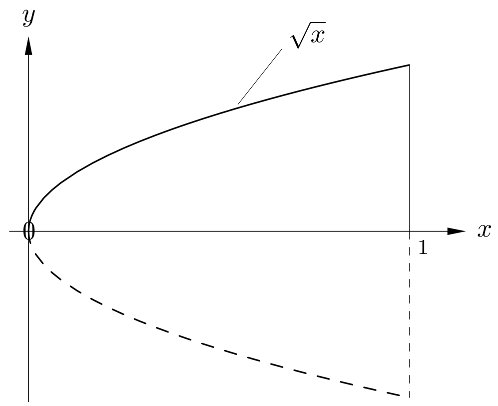

Abb. 9.14 a Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in der (x,y)-Ebene, definiert im Intervall $[0,1]$ bzw. die Rotationsfigur im $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation von f um die x-Achse entsteht. Die z-Achse zeigt in Richtung des Betrachters.

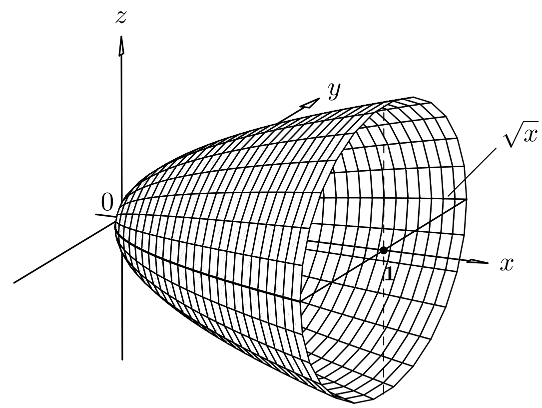

Abb. 9.14 b Diese Abbildung zeigt die gleiche Rotationsfigur wie auf der linken Seite. Diesmal ist jedoch der Rotationskörper räumlich-perspektivisch dargestellt.

(3). Es sei jetzt $I = [1,2]$ und f, g seien in I definierte Funktionen, so daß $f(x) = x$ und $g(x) = 1$. **9/6/1/3**

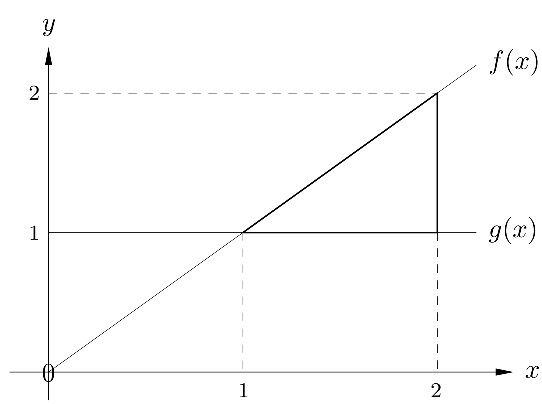

Abb. 9.15 Läßt man die stärker umrandete Dreiecksfläche um die x-Achse rotieren, dann entsteht als Rotationskörper ein „Ring“.

Wir lassen die durch f und g bestimmte Fläche um die x-Achse rotieren und bestimmen das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers.

$$V = \pi \int_1^2 (f^2(x) - g^2(x))\,dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \pi(\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Als Spezialfall erhält man das Volumen eines Kegels mit der Höhe h und dem Radius r. Hierfür ist nämlich $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ und $I = [0, h]$. Also

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}\, x^2\,dx = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

(4). Wir berechnen jetzt das Volumen eines Torus. **9/6/1/4**

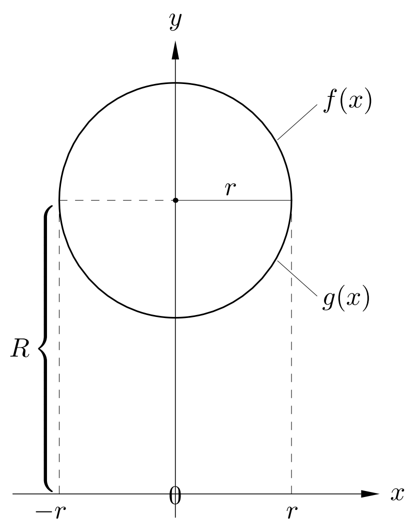

Abb. 9.16 a Die von f und g eingeschlossene Fläche erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen *Torus*.

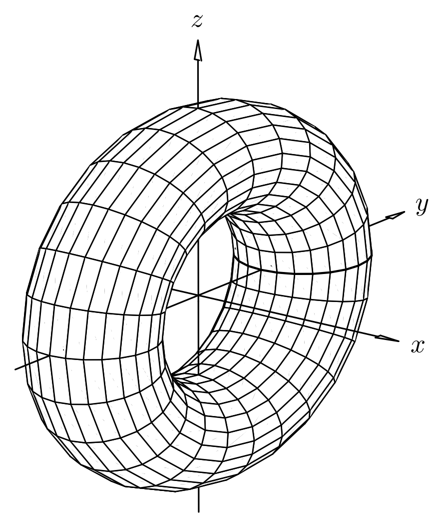

Abb. 9.16 b Die obige Abbildung zeigt diesen Torus räumlich-perspektivisch im Raum $\mathbb{R}^3$.

Dazu betrachten wir die Gleichung $(y-R)^2+x^2 = r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0, R)$ und dem Radius r. Löst man diese Gleichung nach y auf, dann erhält man zwei Funktionen $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$; den oberen und unteren Kreisbogen des Kreises. Läßt man die Fläche des entsprechenden Kreises um die x-Achse rotieren, dann erhält man einen Torus. Dessen Volumen ist gegeben durch

$$V = \int_{-r}^{r} (f^2(x) - g^2(x))\,dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^2(x) - g^2(x) &= R^2 + 2R\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2) \\ &= 4R\sqrt{r^2-x^2}, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$V = 4\pi R \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral, um eine Stammfunktion zu erhalten. Es ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx &= r\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx \\ &= r\int \sqrt{1-t^2}\cdot r\,dt; \quad (\text{für } \ \frac{x}{r} = t) \\ &= r^2 \int \sqrt{1-\sin^2 z}\cdot \cos z\,dz; \quad (\text{für } \ t = \sin z) \\ &= r^2 \int \cos^2 z\,dz \qquad\qquad (\star) \\ &= r^2(\sin z\cos z + \int \underbrace{\sin^2 z}_{=1-\cos^2 z}\,dz); \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= r^2(\sin z \cos z + z) - r^2 \int \cos^2 z\,dz. \end{aligned}$$

Aus $(\star)$ und der letzten Zeile folgt

$$2r^2 \int \cos^2 z\,dz = \frac{r^2}{2}\sin z\cos z + z = \frac{r^2}{2}\sin z\sqrt{1-\sin^2 z} + z.$$

Damit haben wir das unbestimmte Integral – allerdings bezüglich z – gelöst. Wir wollen aber das bestimmte Integral bezüglich x in den Grenzen von $-r$ bis r berechnen. Dazu müßten noch die Grenzen entsprechend der Substitutionen transformiert oder die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Folgende Substitutionen wurden vorgenommen:

$$t = \sin z \implies z = \arcsin t \quad \text{und} \quad \frac{x}{r} = t \implies z = \arcsin\frac{x}{r}.$$

Für $-r \le x \le r$ gilt $-1 \le \frac{x}{r} \le 1$ und schließlich $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{x}{r} \le \frac{\pi}{2}$.

In den betrachteten Intervallen sind die Transformationen bijektiv, folglich ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx &= \frac{r^2}{2}\Big(\sin(\arcsin\frac{x}{r})\cdot\sqrt{1-\Big(\sin(\arcsin\frac{x}{r})\Big)^2} + \arcsin\frac{x}{r}\Big)\Big|_{-r}^{r} \\ &= \frac{r^2}{2}\Big(\frac{x}{r}\cdot\sqrt{1-\Big(\frac{x}{r}\Big)^2} + \arcsin\frac{x}{r}\Big)\Big|_{-r}^{r} \\ &= \frac{r^2}{2}\Big(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\Big) \\ &= \frac{r^2}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\Big) \\ &= \frac{r^2\pi}{2} \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, indem die Integrationsgrenzen entsprechend transformiert werden:

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \frac{r^2}{2}\Big(\sin z \cos z + z\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r^2}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\Big) \\ &= \frac{r^2\pi}{2}.\end{aligned}$$

Also

$$V = 4\pi R \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 2r^2R\pi^2.$$

Allgemeiner gilt die **1. Guldinsche Regel:** **9/6/2**

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Flächeninhalt der rotierenden Fläche, multipliziert mit dem Umfang des Kreises, der durch den Mittelpunkt (oder Schwerpunkt) der rotierenden Fläche beschrieben wird.

9.7 Uneigentliche Integrale

Beim Riemann-Integral wurde stets vorausgesetzt, daß die zu integrierenden Funktionen in einem abgeschlossenen (endlichen) Intervall definiert und beschränkt sind. Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, auch Integrale über unendlichen Intervallen oder über unbeschränkten Funktionen zuzulassen. Dies führt zum sogenannten *uneigentlichen Integral*. **9/7/0**

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*) **9/7/1**
Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar, und es sei $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*
$\underset{\text{Df}}{=}$ Es existiert $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.
Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

Bez.: $\int_a^\infty f(t)\, dt$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t)\, dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t)\, dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.
Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t)\,dt$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

Definition. f ist in $(-\infty, \infty)$ *uneigentlich integrierbar* **9/7/2**
$\overline{\overline{\text{Df}}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f in $(-\infty, a]$ und in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist.
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \underset{\text{Df}}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int\limits_{a}^{\infty} f(t)\,dt$ heißt *uneigentliches Integral* von f in $(-\infty, \infty)$.

Beispiele.

(1). Es sei $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. **9/7/3/1**

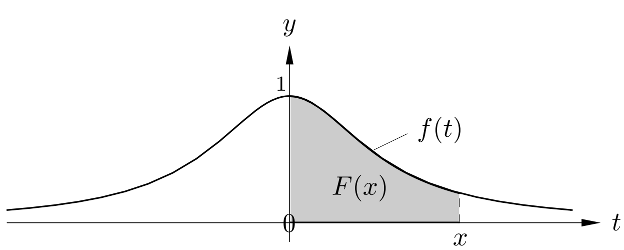

Abb. 9.17 a Der Flächeninhalt der schattierten Fläche ist durch das bestimmte Integral $F(x) := \int\limits_0^x f(t)\,dt$ gegeben.
Für $x \to \infty$ entsteht das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$.

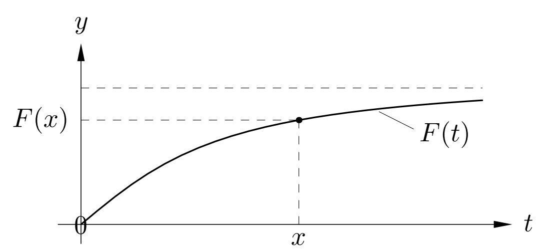

Abb. 9.17 b Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist $F(x) = \arctan x$ eine Stammfunktion von f, folglich gibt $F(x)$ den Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ (Inhalt der schattierten Fläche aus Abb. 9.17 a) an.

Gesucht ist das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, \infty)$.
Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{\infty} f(t)\,dt$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_0^x f(t)\,dx = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^x \\ &= \arctan x - \underbrace{\arctan 0}_{=0} = \arctan x. \end{aligned}$$

Damit gilt $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$. Also

$$\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Analog ist

$$G(x) = \int\limits_x^0 \frac{dt}{1+t^2}\,dt = \arctan 0 - \arctan x = -\arctan x$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty}(-\arctan x) = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und somit} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Bemerkung. $\arctan x$ könnte auch durch $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ definiert werden. Interpretiert man das uneigentliche Integral als Fläche, dann schließt die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+t^2}$ mit der x-Achse in dem unendlichen Intervall $(-\infty,\infty)$ eine „endliche“ Fläche ein.

(2). Wir betrachten jetzt die Funktion $f(t) = \frac{1}{t}$ und zeigen, daß das uneigentliche Inte- **9/7/3/2**
gral $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ nicht konvergiert. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß die „Fläche“, die von oben durch die Funktion und von unten durch die x-Achse in dem Intervall $[1,\infty)$ begrenzt wird, unendlich groß ist (vgl. Abb. 9.18).

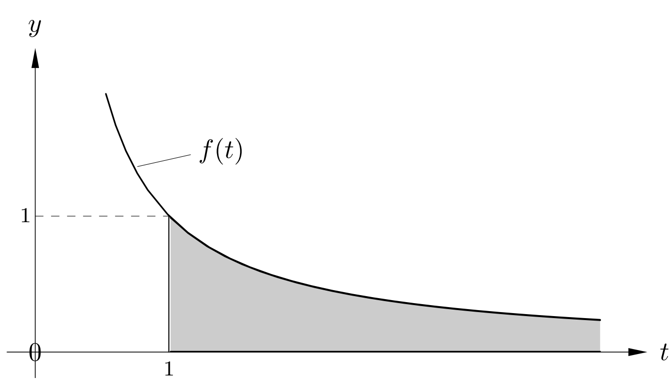

Abb. 9.18 Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t}$ konvergiert nicht, denn $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \infty$.

Es ist

$$F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

und

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty;$$

d.h. der Limes existiert nicht.

Wir betrachten jetzt uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen. **9/7/4**

Definition. (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*) **9/7/5**
Es sei $a < b$ und es gelte eine der Bedingungen:

(1) f ist in $[a, b)$ definiert und für jedes $x \in [a, b)$ in $[a, x]$ integrierbar.
(2) f ist in $(a, b]$ definiert und für jedes $x \in (a, b]$ in $[x, b]$ integrierbar.
(3) $a < c < b$, und f ist für jedes $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ in $[a, x_1]$ und in $[x_2, a]$ integrierbar.

f ist in $[a, b]$ *uneigentlich integrierbar*

$$\underset{\text{Df}}{\equiv} \quad (1) \quad \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.}$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\, dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.}$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \int_x^b f(t)\, dt \quad \text{existieren.}$$

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von f in $[a, b]$, und $\int_a^b f(t)\, dt$ heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent.*

Die folgenden Abbildungen sollen einige Möglichkeiten für die Bildung von uneigentlichen Integralen über beschränkten Intervallen und unbeschränkten Funktionen veranschaulichen. **9/7/6**

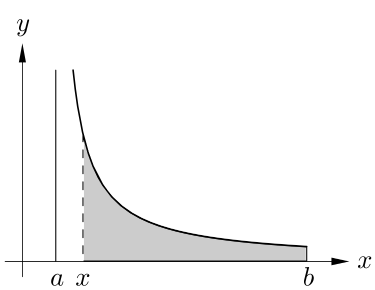

Abb. 9.19 a

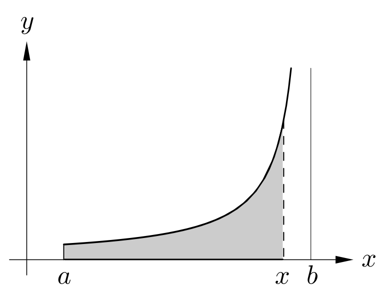

Abb. 9.19 b

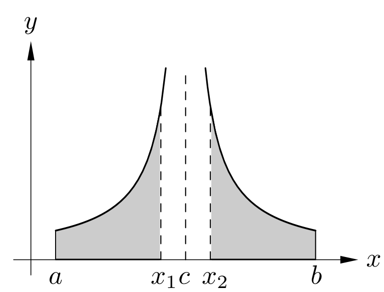

Abb. 9.19 c

Beispiel. Es sei $[a, b] = [0, 1]$ und $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. **9/7/7**

Es soll $\int_0^1 f(t)\, dt$ berechnet werden, falls das uneigentliche Integral konvergiert.
Für $0 < x \leq 1$ ist f in $[x, 1]$ stetig und damit auch integrierbar. Es ist

$$F(x) := \int_x^1 f(t)\, dt = \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}}\, dt = 2\sqrt{t}\Big|_x^1 = 2(1 - \sqrt{x}).$$

Folglich gilt

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2(1-\sqrt{x}) = 2.$$

Die verschiedenen Typen von uneigentlichen Integralen über unendlichen Intervallen bzw. über unbeschränkten Funktionen lassen sich natürlich auch kombinieren. **9/7/8**

Tiefergehende Untersuchungen über uneigentliche Integrale findet man z.B. in der Literaturangabe [3], Band II, XII Uneigentliche Integrale, Seite 574 – 676.

9.8 Länge von Kurven

Zur Erinnerung: $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \le t \le b\}$ ist eine Kurve in $\mathbb{R}^k$, falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ eine stetige Vektorfunktion ist. **9/8/0**

Definition. (*doppelpunktfrei*) **9/8/1**

$\mathfrak{k}$ ist *doppelpunktfrei*

$\underset{\text{Df}}{=}$ für jedes $t_1, t_2 \in [a,b]$ mit $t_1 < t_2$ und $t_1 \ne a$ oder $t_2 \ne b$ gilt $f(t_1) \ne f(t_2)$.
Eine doppelpunktfreie Kurve heißt auch *Jordan-Kurve.*
Ist in der obigen Darstellung $f(a) = f(b)$, dann heißt $\mathfrak{k}$ *geschlossene Kurve.*

Beispiele. Wir geben jetzt einige wichtige Beispiele von Kurven an (vgl. auch die Abbildungen 6.9 und 6.10 aus dem Kapitel 6). **9/8/2**

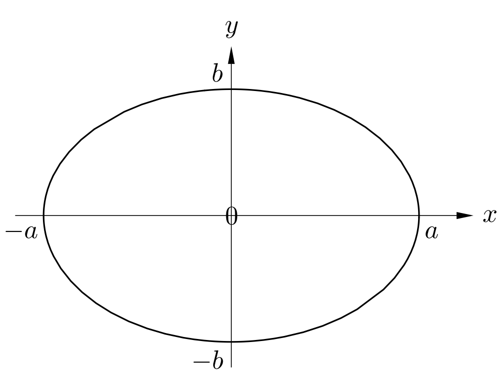

Abb. 9.20 Durch $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$ ist eine Ellipse definiert. Für $a = b$ entsteht ein Kreis.

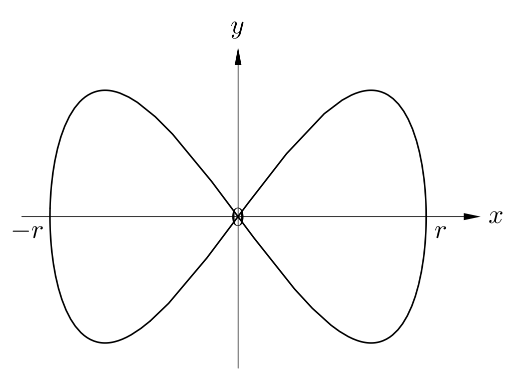

Abb. 9.21 Durch $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r\cos t, r\sin 2t)$ ist eine Lemniskate definiert.

Die nächste Abbildung zeigt eine sog. *Schraubenlinie*.

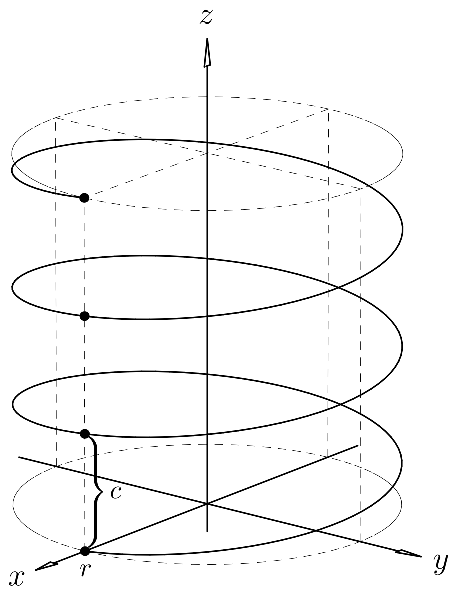

Abb. 9.22 Durch $f := [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r\cos t, r\sin t, c\,t)$ ist eine Schraubenlinie mit der (positiven) Ganghöhe c definiert (Rechtsgewinde). Wenn t das Intervall $[2i\,\pi,\, 2(i+1)\,\pi]$ durchläuft $(\,i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, dann durchläuft $f(t)$ genau einen Gewindegang. In der Abbildung sind drei Gewindegänge dargestellt. Für $c < 0$ entsteht eine „absteigende“ Schraubenlinie (Linksgewinde).

Unser Ziel ist es nun, die Länge einer Kurve zu definieren bzw. zu berechnen. Für **9/8/3**
beliebige Kurven wird sich eine Länge nicht definieren lassen. Daher betrachten wir jetzt einige speziellere Klassen von Kurven.

Definition. **9/8/4**

Sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine Kurve mit der Parameterdarstellung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$.

(1) $\mathfrak{k}$ ist *stetig differenzierbar* in $[a,b]$
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ f ist stetig differenzierbar in $[a,b]$.

(2) $\mathfrak{k}$ ist *glatt* in $[a,b]$
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ f ist stetig differenzierbar in $[a,b]$ und $f'(t) \neq 0$ für jedes $t \in [a,b]$.

(3) $\mathfrak{k}$ ist *stückweise glatt* in $[a,b]$
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Es existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ von $[a,b]$, so daß $\mathfrak{k}$ in jedem Teilintervall $[a_i, a_{i+1}]$ glatt ist.

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerle- **9/8/5**
gung von $[a,b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \ldots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von $a_0, \ldots, a_{n+1}$ der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i))|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^{n} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

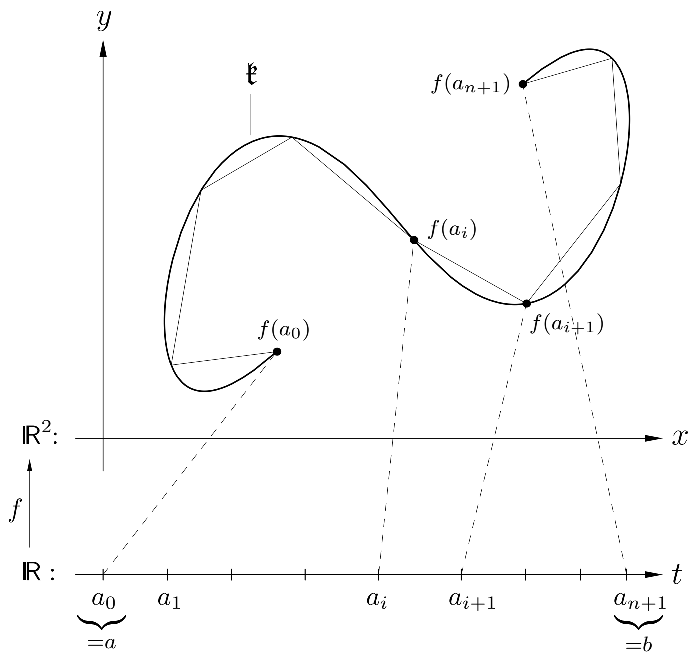

Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit einem einbeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a,b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \ldots, n+1$, auf der Kurve $\mathfrak{k}$.

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

Definition. (*Länge einer Kurve*) **9/8/6**
Sei $\mathfrak{k}$ eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.
$\mathfrak{k}$ ist *rektifizierbar* (d.h. $\mathfrak{k}$ *besitzt eine Länge*)
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es existiert $\sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z}$ beliebige Zerlegung von $[a,b]\}$.
Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit $l(\mathfrak{k})$ bezeichnet.

Es sei jetzt $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^k$. Insbesondere ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$ und $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für jedes $j = 1, \ldots, k$. Weiterhin sei $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a,b]$, und der Einfachheit halber sei $u := a_i$ und $v := a_{i+1}$. Der Abstand zwischen den auf der Kurve liegenden Punkten $f(u)$ und $f(v)$ beträgt **9/8/7**

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= \Big|\Big(f_1(v), \ldots, f_k(v)\Big) - \Big(f_1(u), \ldots, f_k(u)\Big)\Big| \\ &= \Big|\Big(f_1(v) - f_1(u), \ldots, f_k(v) - f_k(u)\Big)\Big| = (\star). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind $f_1, \ldots, f_k$ differenzierbar in $[u,v]$. Folglich gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes f_j ein $\xi_{ij} \in [u,v]$, so daß

$$f_j(v) - f_j(u) = f_j'(\xi_{ij})(v-u). \quad (\xi_{ij} \text{ hängt von } [a_i, a_{i+1}] = [u,v] \text{ und } f_j \text{ ab.})$$

Folglich ist

$$|f(v) - f(u)| = (\star) = \Big|\Big(f_1'(\xi_{i1}) \cdot (v-u), \ldots, f_k'(\xi_{ik}) \cdot (v-u)\Big)\Big|$$

$$= \left|\Big(f_1'(\xi_{i1}),\ldots,f_k'(\xi_{ik})\Big)\cdot(v-u)\right|$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_{ij})\Big)^2}\cdot(v-u).$$

Also

$$|f(a_{i+1})-f(a_i)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_{ij})\Big)^2}\cdot(a_{i+1}-a_i).$$

Die Länge des einbeschriebenen Polygonzuges ist somit

$$l(P_{\mathfrak{Z}}) = \sum_{i=0}^n |f(a_{i+1})-f(a_i)|$$

$$= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_{ij})\Big)^2}\cdot(a_{i+1}-a_i).$$

Die letzte Summe sieht einer Zwischensumme bezüglich der Funktion

$$g(t) = |f'(t)| = |(f_1'(t),\ldots,f_k'(t))| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(t)\Big)^2}$$

ähnlich. Offenbar ist für $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}],\ i = 1,\ldots,n$ und $\tau = (\xi_0,\ldots,\xi_n)$,

$$\begin{aligned} S_g(\mathfrak{z},\tau) &= \sum_{i=0}^n g(\xi_i)\cdot(a_{i+1}-a_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_i)\Big)^2}\cdot(a_{i+1}-a_i) \end{aligned}$$

eine Zwischensumme. Wir werden jetzt zeigen, daß sich $l(P_{\mathfrak{Z}})$ und $S_g(\mathfrak{z},\tau)$ bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig unterscheiden.

Lemma. *Es sei* $\mathfrak{k}$ *eine durch* $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ *definierte und stetig differenzierbare Kurve. Weiterhin sei* $(\mathfrak{z}_\nu)$ *eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von* $[a,b]$*, und* (τ_ν) *sei eine Folge zugehöriger Zwischenstellensysteme von* $(\mathfrak{z}_\nu)$*. Dann folgt:* **9/8/8**
Für jedes $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* ν_0*, so daß für jedes* $\nu \geq \nu_0$ *gilt:*
$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu,\tau_\nu)| < \varepsilon$*, wobei* $g(t) = |f'(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(t)\Big)^2}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu,\ldots,a_{n_\nu+1}^\nu)$ und $\tau_\nu = (\xi_1^\nu,\ldots,\xi_n^\nu)$. Dann gilt **9/8/9**

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu,\tau_\nu)|$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n_\nu}\sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_{ij}^\nu)\Big)^2}\cdot(a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) - \sum_{i=0}^{n_\nu}\sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_i^\nu)\Big)^2}\cdot(a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n_\nu}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_{ij}^\nu)\Big)^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_i^\nu)\Big)^2}\right)\right|\cdot(a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n_\nu} \Big| |\bar{\alpha}_i| - |\bar{\beta}_i| \Big| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \ , \quad \text{wobei} \quad \bar{\alpha}_i = \Big(f_1'(\xi_{i1}^\nu), \ldots, f_k'(\xi_{ik}^\nu \Big)$$

$$\text{und} \quad \bar{\beta}_i = \Big(f_1'(\xi_i^\nu), \ldots, f_k'(\xi_i^\nu) \Big)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n_\nu} |\bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_i| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)$$

$$= \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^k \Big(f_j'(\xi_{ij}^\nu) - f_j'(\xi_i^\nu) \Big)^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) = (\star).$$

Nach Voraussetzung sind die Funktionen f_j' stetig in $[a,b]$, also sind sie auch gleichmäßig stetig. Folglich erhält man:
Für jedes $\varepsilon' > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle ξ_{ij}^ν, $\xi_i^\nu \in [a,b]$ mit $|\xi_{ij}^\nu - \xi_i^\nu| < \delta$ gilt: $|f_j'(\xi_{ij}^\nu) - f_j'(\xi_i^\nu)| < \varepsilon'$, also auch $\Big(f_j'(\xi_{ij}^\nu) - f_j'(\xi_i^\nu) \Big)^2 < \varepsilon'^2$.
Wählt man ν_0 so groß, daß $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_0$, dann erhält man

$$\begin{aligned} (\star) = \Big| l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \Big| \quad &< \quad \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^k \varepsilon'^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \\ &= \quad \varepsilon' \sqrt{k} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{=\,b-a} \\ &= \quad \varepsilon' \sqrt{k} \cdot (b-a). \end{aligned}$$

Wir wählen jetzt

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k} \cdot (b-a)}.$$

Dann ist

$$\Big| l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \Big| < \varepsilon' \sqrt{k} \cdot (b-a) = \sqrt{k} \cdot (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{k} \cdot (b-a)} = \varepsilon. \qquad ❏$$

Satz 9.23 *Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *und* $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ *eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist* $\mathfrak{k}$ *rektifizierbar, und es gilt* **9/8/10**

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^k \Big(f_j'(t) \Big)^2} \, dt.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Menge **9/8/11**

$$M = \{ l(P_{\mathfrak{z}}) : \ \mathfrak{z} \ \text{Zerlegung von} \ [a,b] \}$$

nach oben beschränkt ist ($\Longrightarrow$ es existiert $\sup M$, und somit ist $\mathfrak{k}$ rektifizierbar).
Angenommen, M ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge $(\mathfrak{z}_\nu)$ von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, so daß die Folge $\Big(l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) \Big)$ nicht nach oben beschränkt

ist. Sei o.B.d.A. $(\mathfrak{z}_\nu)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (durch entsprechende Verfeinerungen läßt sich dies immer erreichen; und aufgrund der Dreiecksungleichung wird bei einer verfeinerten Zerlegung der einbeschriebene Polygonzug höchstens länger). Nach dem Lemma gilt dann für $g(t) = |f'(t)|$.

$$\lim_{\nu\to\infty} \Big(\underbrace{l(P_{\mathfrak{z}_\nu})}_{=\alpha_\nu} - \underbrace{S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)}_{=\beta_\nu} \Big) = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von $g(t) = |f'(t)|$ in $[a,b]$ ist $|f'(t)|$ als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen in $[a,b]$ integrierbar. Folglich gilt nach Satz 9.9

$$\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \int_a^b |f'(t)|\,dt := d \in \mathbb{R}.$$

Da $\beta_\nu \to d$ und $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$ eine Nullfolge ist, muß auch die Folge (α_ν) gegen d konvergieren. Dies führt zum Widerspruch.

Folglich gilt $\alpha_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} l(\mathfrak{k})$, und damit ist $l(\mathfrak{k}) = \int\limits_a^b |f'(t)|\,dt.$ ❏

Korollar. *Ist* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar,* $f(t) = \big(t,\ g(t)\big) := \big(f_1(t),\ f_2(t)\big)$ *und* $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \le t \le b\}$, *dann ist* $\mathfrak{k}$ *rektifizierbar und* **9/8/12**

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\,dt.$$

Beweis. Die Rektifizierbarkeit von $\mathfrak{k}$ ist offensichtlich. **9/8/13**

Weiterhin gilt $|f'(t)| = |(t,\ g(t))'| = \sqrt{\big(f_1'(t)\big)^2 + \big(f_2'(t)\big)^2} = \sqrt{1 + g'^2(t)}.$ ❏

Bemerkung. Betrachtet man eine Kurve, die (wie im Korollar) durch eine reellwertige Funktion einer Veränderlichen definiert ist, dann erhält man eine vereinfachte Formel für die Länge dieser Kurve. **9/8/14**

Beispiele.

(1). Verbindungsstrecke zweier Punkte in der Ebene. **9/8/15/1**

Es sei $\bar a = (1,1)$ und $\bar b = (3,2)$. Wählt man als Parameterintervall $[0,1]$, dann ist durch $f(t) = \bar a + t(\bar b - \bar a) = (1+2t, 1+t) := \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke $\mathfrak{k}$ gegeben. Offenbar sind f_1, f_2 in $[0,1]$ stetig differenzierbar und $f_1'(t) = 2,\ f_2'(t) = 1$ und damit $f'(t) = (2,1)$ für jedes $t \in [0,1]$. Folglich ist $\mathfrak{k}$ rektifizierbar und

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 |f'(t)|\,dt = \int_0^1 |(2,1)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{2^2 + 1^2}\,dt = \sqrt{5}.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis in diesem einfachen Fall auch ohne Integrale erhalten.

(2). Umfang eines Kreises mit dem Radius r. **9/8/15/2**

Wir betrachten einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius r (vgl. auch Abb. 9.20).

Für die Kreislinie $\mathfrak{k}$ ist durch $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ mit $f(t)=(r\cos t,\ r\sin t)$ eine Parameterdarstellung gegeben. Offenbar ist f in $[0,2\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t)=(-r\sin t,\ r\cos t)$. Folglich ist

$$|f'(t)|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=r$$

und damit

$$l(\mathfrak{k})=\int_0^{2\pi}|f'(t)|\,dt=\int_0^{2\pi}r\,dt=r2\pi.$$

(3). Länge der Schraubenlinie (vgl. Abb. 9.22). **9/8/15/3**

Wir betrachten eine Schraubenlinie mit dem Radius r und zwei „Gewindegängen". Es sei $f:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3$, $f(t)=(r\cos t,\ r\sin t,\ ct)$, $c\neq 0$. f ist in $[0,4\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t)=(-r\sin t,\ r\cos t,\ c)$. Dann ist

$$|f'(t)|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t+c^2}\,dt=\sqrt{r^2+c^2}.$$

Damit erhält man

$$l(\mathfrak{k})=\int_0^{4\pi}\sqrt{r^2+c^2}\,dt=\sqrt{r^2+c^2}\cdot 4\pi.$$

(4). Länge der Normalparabel, definiert im Intervall $[0,1]$ (Beispiel für die Berechnung der Länge einer Kurve mit Hilfe des Korollars zu Satz 9.23). **9/8/15/4**

Es sei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $g(t)=t^2$ und $f(t)=\big(t,\ g(t)\big)$.
Dann ist durch $\mathfrak{k}=\{f(t):0\le t\le 1\}$ eine stetig differenzierbare Kurve gegeben und $f'(t)=(1,\ 2t)$. Also

$$l(\mathfrak{k})=\int_0^1\sqrt{1+(g'(t))^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\,dt=(\star)$$

Man berechnet zunächst am besten das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+4t^2}\,dt&=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+z^2}\,dz\\&=\frac{1}{2}\Big((z\cdot\sqrt{1+z^2})+\ln(z+\sqrt{1+z^2}\,)\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big((2t\cdot\sqrt{1+4t^2})+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2}\,)\Big).\end{aligned}$$

(Die eigentliche Berechnung des Integrals $\int\sqrt{1+z^2}\,dz$ bleibt als Übungsaufgabe.) Also

$$l(\mathfrak{k})=\frac{1}{2}\Big(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}\,)\Big).$$

Bemerkung. Die Stetigkeit von f ist nicht hinreichend für die Rektifizierbarkeit der **9/8/15/5**
entsprechenden Kurve $\mathfrak{k}$. Wir betrachten als Beispiel die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} (t,\ t\sin\frac{\pi}{2t}) & \text{für } t \neq 0, \\ (0,0) & \text{für t = 0.} \end{cases}$$

f ist in $[0, \frac{1}{4}]$ stetig, aber nicht rektifizierbar.

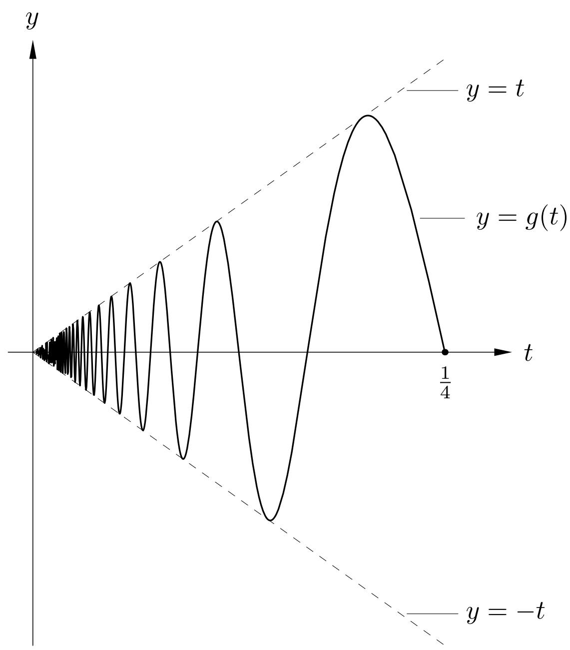

Abb. 9.24 Ist $g(t) := t\sin\frac{\pi}{2t}$, dann wird durch die Funktion $f : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ die hier gezeigte Kurve definiert. (Für größere t setzt sich die Kurve so nicht fort!.) An den Stellen $t = \frac{1}{2n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, ist $g(t)$ null; an den Stellen $\frac{1}{4n+1}$ bzw. $\frac{1}{4n+3}$ ist $g(t) = t$ bzw. $g(t) = -t$, hierbei ist $n = 1, 2, 3, \ldots$.

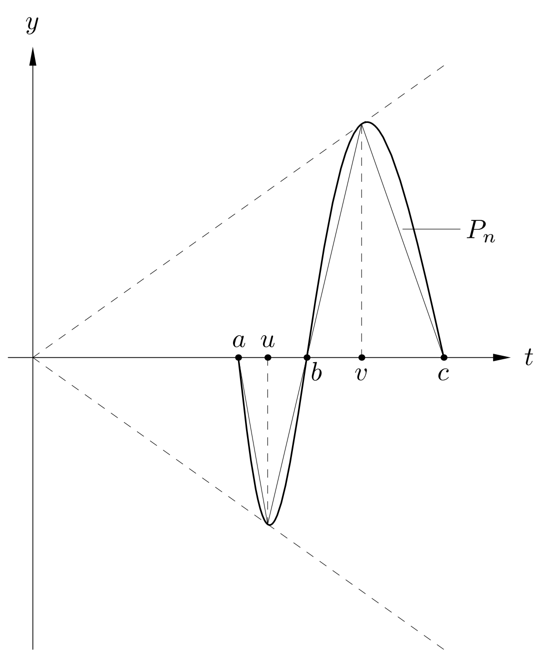

Abb. 9.25 In dieser Abbildung wird nur das Kurvenstück dargestellt, welches das Bild des Intervalls $[a, c]$ ist, wobei $a = \frac{1}{4n+4}$ und $c = \frac{1}{4n}$. Weiterhin ist $u = \frac{1}{4n+3}$, $b = \frac{1}{4n+2}$ und $v = \frac{1}{4n+1}$. Entsprechend dieser Zerlegung von $[a, c]$ ist P_n der einbeschriebene Polygonzug.

Wir betrachten jetzt die Funktion $g : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$ und die Kurve $\mathfrak{k} := \{ f(t) = (t, g(t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \}$ und zeigen, daß $\mathfrak{k}$ nicht rektifizierbar ist.
Dazu sei $1 \leq n < k$ und $\mathfrak{z}_k = (\frac{1}{4k}, \dots, \underbrace{\frac{1}{4n+4}}_{a}, \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_{u}, \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_{b}, \underbrace{\frac{1}{4n+1}}_{v}, \underbrace{\frac{1}{4n}}_{c}, \dots, \frac{1}{4})$ eine Zerlegung von $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{4}]$ (siehe auch Abb. 9.25).
Wir berechnen zunächst den Abstand zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(u, \underbrace{f(u)}_{-u})$ in $\mathbb{R}^2$. Es ist

$$\begin{aligned}
|(u, -u) - (a, 0)| &= \Big| \Big(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}, -\frac{1}{4n+3} \Big) \Big| \\
&= \left| \left(\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}, -\frac{4n+4}{(4n+3)(4n+4)} \right) \right| \\
&= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \Big| (1, -(4n+4)) \Big| \\
&= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \sqrt{1 + (4n+4)^2} \\
&\geq \frac{1}{4n+3}.
\end{aligned}$$

Völlig analog ist

$$|(u, -u) - (b, 0)| \geq \frac{1}{4n+3}.$$

Ebenso zeigt man, daß die Abstände zwischen $(b, 0)$ und $(v, \underbrace{f(v)}_{=v})$ bzw. zwischen (v, v) und $(c, 0)$ größer oder gleich $\frac{1}{4n+1}$ sind.
Insgesamt erhält man, daß der Polygonzug P_n eine Länge

$$l(P_n) \geq 2 \cdot \frac{1}{4n+3} + 2 \cdot \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

besitzt. Für die Länge des gesamten (einbeschriebenen) Polygonzuges $P_{\mathfrak{z}_k}$ bezüglich des Intervalls $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{k}]$ ist dann

$$l(P_{\mathfrak{z}_k}) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1};$$

und diese Summe ist für $k \to \infty$, also für $\frac{1}{4k} \to 0$, nicht beschränkt. Folglich ist $\mathfrak{k}$ nicht rektifizierbar.

Im nächsten Abschnitt befassen wir uns mit der Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Funktionenfolgen und -reihen. **9/8/16**

9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 9.24 (*Integrierbarkeit der Grenzfunktion*) **9/9/1**
Sei $a < b$, $I = [a,b]$ *und* (f_n) *eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall* I *definiert sind. Dann gilt*:

(1) *Konvergiert* (f_n) *in* I *gleichmäßig gegen die Funktion* f *und sind alle* f_n *in* I *integrierbar, dann ist* f *in* I *integrierbar, und es ist*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$
(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

(2) *Konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *in* I *gleichmäßig gegen die Funktion* f *und sind alle* f_n *in* I *integrierbar, dann ist* f *in* I *integrierbar, und es ist*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$
(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)

Beweis. (1). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein **9/9/2**
n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $x \in I$ gilt:
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} := \varepsilon'.$$
Da f_n in I integrierbar ist, ist f_n und damit auch f in I beschränkt. Mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums zeigen wir, daß f in I integrierbar ist.
Sei $n \geq n_0$ fixiert. Nach der obigen Ungleichung ist
$$f_n(x) - \varepsilon' < f(x) < f_n(x) + \varepsilon' \ \text{ für alle } \ x \in I.$$
Folglich gilt für jedes Teilintervall $I' \subseteq I$:
$$\sup_{x\in I'} f(x) \leq \sup_{x\in I'} f_n(x) + \varepsilon' \quad \text{und} \quad \inf_{x\in I'} f(x) \geq \inf_{x\in I'} f_n(x) - \varepsilon'.$$
Da f_n in I integrierbar ist, existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \ldots, a_{k+1})$ von I, so daß
$$\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$
Schließlich erhält man für $I_i := [a_i, a_{i+1}]$:
$$\begin{aligned}\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{k}(a_{i+1} - a_i)\cdot\Big(\sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x)\Big)\\ &\leq \sum_{i=0}^{k}(a_{i+1} - a_i)\cdot\Big(\sup_{x\in I_i} f_n(x) + \varepsilon' - \inf_{x\in I_i} f_n(x) + \varepsilon'\Big)\end{aligned}$$

$$= 2\varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k}(a_{i+1} - a_i)}_{= b-a} + \underbrace{\Big(\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z})\Big)}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< 2\varepsilon'(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Folglich ist f in I integrierbar.
Wegen $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$ gilt weiterhin

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \Big(f_n(x) - f(x)\Big)\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{< \varepsilon'}\,dx$$

$$< \varepsilon' \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx.$$

(2). Setzt man $F_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$, dann konvergiert (F_n) in I gleichmäßig gegen f, und alle F_n sind in I integrierbar. Folglich gilt nach (1):

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} F_n(x)\,dx\Big) = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Weiterhin ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Big(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\Big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\int_a^b f_i(x)\,dx}_{:= g_i(x)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} g_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b f_i(x)\,dx,$$

und damit gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \qquad ❏$$

Korollar. 9/9/3

(1) *Eine in einem Intervall* $I = [a, b]$ *gleichmäßig konvergente Funktionenreihe kann gliedweise integriert werden.*

(2) *Potenzreihen können in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzbereiches gliedweise integriert werden.*

Beweis. Der Beweis ist nach den Sätzen 5.20 und 9.24(2) trivial. ❑ 9/9/4

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Motivierung der Integralrechnung, 9/10/1
- Definitionen: Stammfunktion, unbestimmtes Integral, 9/10/2
- Integrationsregeln (Summenregel, partielle Integration, Substitutionsregel), 9/10/3
- Partialbruchzerlegung (allgemeine Problemstellung), 9/10/4
- Definitionen: Zerlegung, Verfeinerung, Maximaldistanz, ausgezeichnete Zerlegungsfolge, Ober-, Untersumme, Ober-, Unterintegral, bestimmtes Integral, 9/10/5
- Beziehungen zwischen Ober- und Untersummen (Satz 9.5), 9/10/6
- Darstellung des bestimmten Integrals als Limes einer Folge von Ober- bzw. Untersummen (Satz 9.7), 9/10/7
- Riemannsches Integrierbarkeitskriterium (Satz 9.8), 9/10/8
- Definition: Zwischensumme; Darstellung des bestimmten Integrals mit Hilfe von Zwischensummen (Satz 9.9), 9/10/9
- Klassen integrierbarer Funktionen (stetige Funktionen, Funktionen mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen, monotone Funktionen sind integrierbar – Sätze 9.10, 9.11, 9.12); Summe, Produkt, Quotient, Betrag von integrierbaren Funktionen sind integrierbar (Satz 9.13), 9/10/10
- Mittelwertsätze der Integralrechnung (Satz 9.16 + Korollar, zusätzlich auch Satz 9.15), 9/10/11
- Darstellung einer Stammfunktion als bestimmtes Integral mit veränderlicher oberer Grenze (einschließlich Sätze 9.17, 9.18), 9/10/12
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 9.19), 9/10/13

- Partielle Integration, Substitutionsregel bei bestimmten Integralen (Sätze 9.20, 9.21), **9/10/14**

- inhaltliche Erläuterung: Volumen von Rotationskörpern, **9/10/15**

- Definition uneigentlicher Integrale, **9/10/16**

- Parameterdarstellung von Kurven, Definition der Rektifizierbarkeit (inhaltliche Erläuterung der Länge von Kurven). **9/10/17**

- Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen und -reihen (Satz 9.24 + Korollar). **9/10/18**