

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

**Satz 10.3** (*iterierte Integrale über Rechteckbereichen*)

10/1/13

Sei  $D = [a, b] \times [c, d]$  und  $f$  in  $D$  integrierbar. Ist  $f(x, y)$  für jedes fixierte  $x \in [a, b]$  als Funktion von  $y$  in  $[c, d]$  integrierbar und ist  $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$  in  $[a, b]$  integrierbar, dann ist  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$ .

**Beweis.** Es seien  $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ ,  $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$  Zerlegungen von  $[a, b]$  bzw. von  $[c, d]$ , und es sei  $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ , wobei  $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ . Dann gilt

10/1/14

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy,$$

und somit

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left( \sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Für  $h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$  und  $H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$  gilt stets

$$h_{ij} \leq f(\bar{x}) \leq H_{ij} \quad \text{für alle } \bar{x} = (x, y) \in D.$$

Ist  $x \in [a, b]$ , dann erhält man sofort

$$h_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) \leq \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \leq H_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j).$$

Integriert man die letzte Ungleichung nach  $x$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} h_{ij} \cdot D_{ij} &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} h_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) dx \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left( \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dx \right) dx \\ &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} H_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) dx \leq H_{ij} \cdot D_{ij}. \end{aligned}$$

Summiert man diese Ungleichungen nach  $i$  und  $j$ , so erhält man

$$\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left( \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) .$$

Da  $f$  in  $D$  integrierbar ist, unterscheiden sich Ober- und Untersumme bei einer geeigneten Zerlegung nur um beliebig wenig.

Da nach Definition des Doppelintegrals stets  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  ist, gilt schließlich

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad \square$$