

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Bisher ist das Integral nur über Rechteckbereichen $D = [a, b] \times [c, d]$ definiert. Wir werden die Definition jetzt auf einfache Bereiche erweitern. Dazu sei zunächst B ein x -einfacher Bereich (für y -einfache Bereiche erfolgt die Definition analog), und $f(x, y)$ sei eine in B definierte und stetige Funktion.

B sei mit Hilfe der in $[a, b]$ stetigen Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ gegeben, und D sei so gewählt, daß $B \subseteq D$, also $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq d\}$.

Durch den folgenden „Kunstgriff“ wird der Definitionsbereich von f auf D erweitert (vgl. Abb. 10.6).

$$f^*(x, y) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(x, y), & \text{für } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{für } (x, y) \in D \setminus B. \end{cases}$$

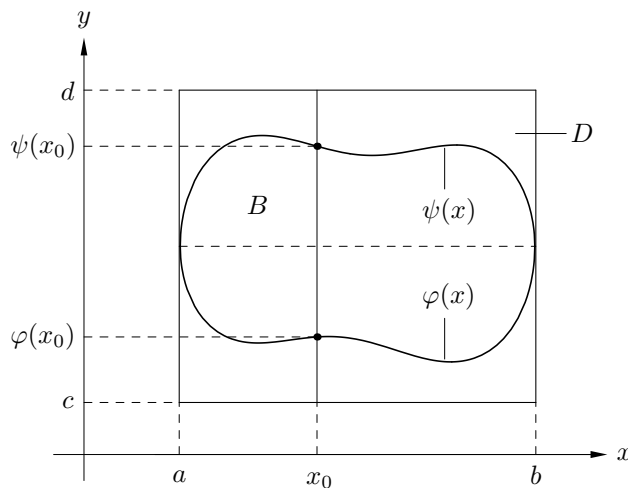


Abb. 10.6 In dieser Abbildung wird ein x -einfacher Bereich B dargestellt, der in einem Rechteck D eingeschlossen ist. Auf B ist eine Funktion $f(x, y)$ definiert, die auf D zu $f^*(x, y)$ erweitert wird. Fixiert man ein $x_0 \in [a, b]$, dann gilt entsprechend der Definition von ψ und φ stets: $f^*(x_0, y) = 0$, falls $c \leq y < \varphi(x_0)$ oder $\psi(x_0) < y \leq d$ und $f^*(x_0, y) = f(x_0, y)$, anderenfalls.

Man überlegt sich leicht, daß B kompakt ist, denn B ist offensichtlich beschränkt, und der Rand von B gehört zu B . Nach Voraussetzung ist f in B stetig, also auch beschränkt. Folglich ist f^* in D definiert und beschränkt, aber dort nicht mehr unbedingt stetig.

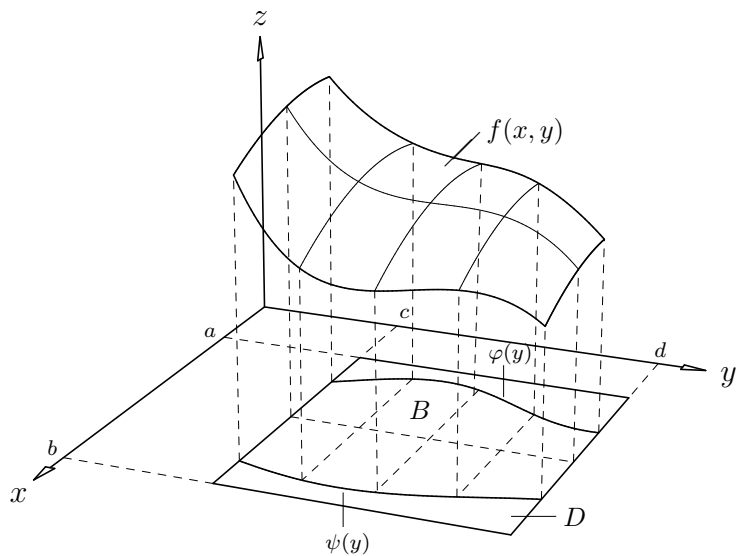


Abb. 10.7

Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x, y)$, die zunächst nur in dem y -einfachen Bereich B definiert ist. Mittels der obigen Definition von f^* wird $f(x, y)$ „trivial“ auf den Rechteckbereich D zu $f^*(x, y)$ erweitert.