Kapitel 10
Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Satz 10.4 *Es sei B ein über $[a,b]$ x-einfacher bzw. über $[c,d]$ y-einfacher Bereich, $B \subseteq D := [a,b] \times [c,d]$, und $f(x,y)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist $f^\star$ in D integrierbar, und es ist* **10/1/22**

$$\iint\limits_D f^\star(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f^\star(x,y)\,dy\Big)dx \quad \textit{bzw.}$$

$$\iint\limits_D f^\star(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^b f^\star(x,y)\,dx\Big)dy.$$

Beweisidee. Wir betrachten den Fall, daß B ein x-einfacher Bereich ist, den verbleibenden Fall beweist man analog. **10/1/23**
Aufgrund von Satz 10.3 genügt folgendes zu zeigen:

1. $f^\star$ ist in D integrierbar,
2. Für jedes feste $x \in [a,b]$ ist $f^\star(x,y)$ (als Funktion von y) in $[c,d]$ integrierbar, und
3. $F(x) := \int\limits_c^d f^\star(x,y)\,dy$ ist (als Funktion von x) in $[a,b]$ integrierbar.

Behauptung 1 kann mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums nachgewiesen werden. Der Beweis ist jedoch etwas langwierig, daher wird er hier weggelassen.

2. Für jedes fixierte $x_0 \in [a,b]$ ist $f^\star(x_0,y)$ in $[c,d]$ definiert und beschränkt und in $[c,d] \setminus \{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$ stetig (als Funktion der Veränderlichen y, vgl. Abb. 10.6). Folglich ist $f^\star(x_0,y)$ in $[c,d]$ integrierbar.
3. Für die Integrierbarkeit von $F(x)$ genügt es, die Stetigkeit von $F(x)$ in $[a,b]$ nachzuweisen.

Dazu sei $x_0 \in [a,b]$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in [a,b]$ gilt: Wenn $|x - x_0| < \delta$, so $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$.
Offenbar ist $f^\star$ in $D := [a,b] \times [c,d]$ beschränkt. Folglich gibt es ein $c^\star \in \mathbb{R}$, so daß $|f^\star(x,y)| < c^\star$ für alle $(x,y) \in D$.
Nach Voraussetzung sind φ, ψ in $[a,b]$ stetig. Damit gilt:
Für jedes $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $\delta' > 0$, so daß für alle $x \in [a,b]$ gilt: wenn $|x - x_0| < \delta'$, so $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon'$ und $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon'$.
Sei o.B.d.A. $c < \varphi(x_0) < \psi(x_0) < d$ (falls $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, dann vereinfacht sich der Beweis) und ε' so klein, daß $c < \varphi(x_0) - \varepsilon' < \varphi(x_0) + \varepsilon' < \psi(x_0) - \varepsilon' < \psi(x_0) + \varepsilon' < d$.
Der Einfachheit halber setzen wir jetzt

$c := c_0,\ \varphi(x_0) - \varepsilon' := c_1,\ \varphi(x_0) + \varepsilon' := c_2,\ \psi(x_0) - \varepsilon' := c_3,\ \psi(x_0) + \varepsilon' := c_4,\ d := c_5$

(vgl. Abb. auch 10.6).

Es ist

$$
\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \Big|\int_c^d f^\star(x,y)\,dy - \int_c^d f^\star(x_0,y)\,dy\Big| \\
&= \Big|\int_c^d \Big(f^\star(x,y) - f^\star(x_0,y)\Big)dy\Big| \\
&\le \int_c^d \underbrace{\Big|f^\star(x,y) - f^\star(x_0,y)\Big|}_{:=g(y)}\,dy \\
&= \int_{c_0}^{c_1} g(y)\,dy + \cdots + \int_{c_4}^{c_5} g(y)\,dy,
\end{aligned}
$$

wobei $g(y) := |f^\star(x,y) - f^\star(x_0,y)|$.

Aufgrund der Definition von $f^\star$ gilt:

für $y \in [c_0, c_1]$ bzw. $y \in [c_4, c_5]$ ist $f^\star(x,y) = f^\star(x_0,y) = 0$,
für $y \in [c_1, c_2]$ bzw. $y \in [c_3, c_4]$ ist $g(y) \le 2c^\star$, und
für $y \in [c_2, c_3]$ ist $g(y) < \varepsilon'$, falls $|x - x_0| < \delta'$.

Daraus erhält man

$$
\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \int_{c_0}^{c_1} \underbrace{g(y)}_{=0}\,dy + \int_{c_1}^{c_2} \underbrace{g(y)}_{<2c^\star}\,dy + \int_{c_2}^{c_3} \underbrace{g(y)}_{<\varepsilon'}\,dy + \int_{c_3}^{c_4} \underbrace{g(y)}_{<2c^\star}\,dy + \int_{c_4}^{c_5} \underbrace{g(y)}_{=0}\,dy \\
&< 2c^\star(\underbrace{c_2 - c_1}_{=\varepsilon'}) + \varepsilon'(c_3 - c_2) + 2c^\star(\underbrace{c_4 - c_3}_{=\varepsilon'}) \\
&= \varepsilon'(\underbrace{4c^\star + c_3 - c_2}_{:=c^{\star\star}}) = \varepsilon' c^{\star\star} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

falls $\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{c^{\star\star}}$ und $|x - x_0| < \delta' := \delta$.

Folglich ist $F(x)$ in $[a,b]$ stetig. ❏

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich das Doppelintegral über einfache Bereiche wie folgt definieren.