Kapitel 10
Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Satz 10.5 (*iterierte Integrale über einfachen Bereichen*) **10/1/26**

(1) *Es sei* $B := \{(x, y) : a \le x \le b$ *und* $\varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ *ein* x*-einfacher Bereich und* $f(x, y)$ *sei in* B *stetig. Dann ist* ($f(x, y)$ in B integrierbar und)

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx \ .$$

(2) *Es sei* $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \le x \le \psi_1(y)$ *und* $c \le y \le d\}$ *ein* y*-einfacher Bereich und* $f(x, y)$ *sei in* B_1 *stetig. Dann ist* ($f(x, y)$ in B_1 integrierbar und)

$$\iint_{B_1} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx \Big) dy \ .$$

Beweis. (1). Es sei $D := [a, b] \times [c, d]$, $B \subseteq D$ und **10/1/27**

$$f^\star(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{für } c \le y < \varphi(x), \\ f(x,y), & \text{für } \varphi(x) \le y \le \psi(x), \\ 0, & \text{für } \psi(x) < y \le d. \end{cases}$$

Für jedes fixierte $x \in [a, b]$ gilt dann

$$\int_a^b f^\star(x,y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^\star(x,y)\,dy.$$

Daraus erhält man (mit Hilfe von Satz 10.4)

$$\begin{aligned} \iint_B f(x,y)\,dxdy &= \iint_D f^\star(x,y)\,dxdy \\ &= \int_a^b \Big(\int_c^d f^\star(x,y)\,dy \Big) dx \\ &= \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx. \end{aligned}$$

(2) wird analog bewiesen. ❏