

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Beispiele.

2. Das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius r .

10/1/28/2

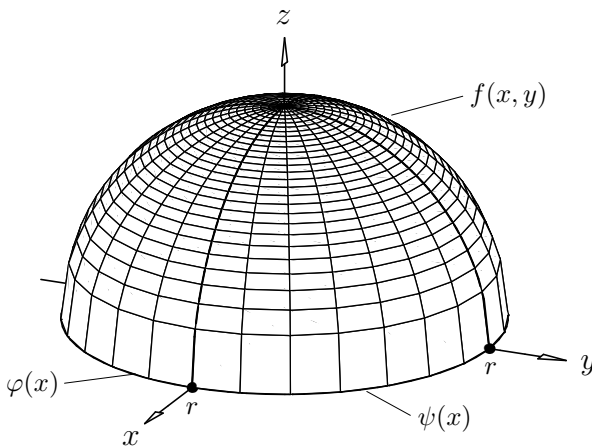


Abb. 10.9 In der Abbildung ist eine Halbkugel mit dem Radius r dargestellt. Die Grundfläche der Halbkugel entspricht dem x -einfachen Bereich B , dessen untere bzw. obere Begrenzung durch die Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ gegeben sind.

Sei B wie im vorhergehenden Beispiel definiert und f durch $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ gegeben (f beschreibt den oberen Teil der Kugeloberfläche). Offenbar ist f in B stetig, folglich gilt:

$$\begin{aligned} V &= \iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dy \right) dx = \frac{2}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

(Die Auswertung des letzten Integrals bleibt als Übungsaufgabe.)