

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Beispiele.

1. Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h (siehe Abb. 10.8).

10/1/28/1

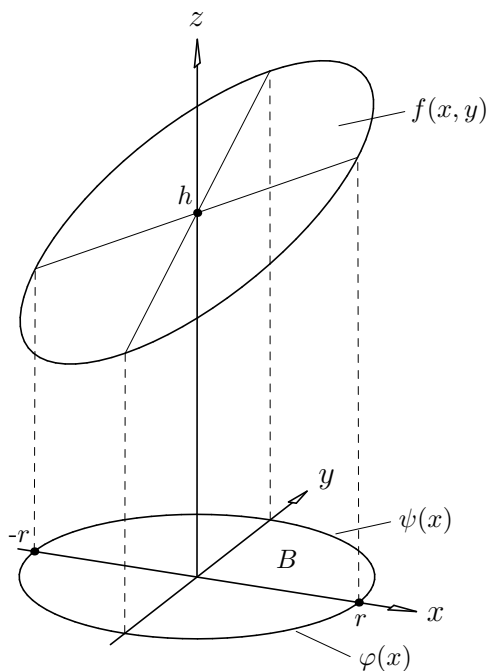


Abb. 10.8 Die Abbildung zeigt einen schräg abgeschnittenen geraden Kreiszyinder mit dem Radius r und der „Höhe“ h , wobei die Höhe in dem Mittelpunkt der Grundfläche zu betrachten ist.

Der obere schräge Schnitt mit dem Kreiszyinder wird durch die Funktion $f(x, y) = h + x + y$ erzeugt, die bekanntlich eine Ebene im \mathbb{R}^3 definiert.

Es ist $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und damit

$$y_1 := \psi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y_2 := \varphi(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

für $-r \leq x \leq r$. Also

$$B = \{(x, y) : -r \leq x \leq r \quad \text{und} \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Für $f(x, y) := h + x + y$ ist f in B stetig, und somit gilt

$$\begin{aligned} V &= \iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (h + x + y) \, dy \right) dx = \int_{-r}^r \left[(h + x) \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-r}^r 2(h+x) \cdot \sqrt{r^2-x^2} \, dx + \frac{1}{2} \int_{-r}^r \underbrace{(\psi(x)^2 - \varphi(x)^2)}_{=0} \, dx \\
&= r^2 \pi h.
\end{aligned}$$

(Die Berechnung der beiden letzten Integrale bleibt als Übungsaufgabe.)

2. Das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius r .

10/1/28/2

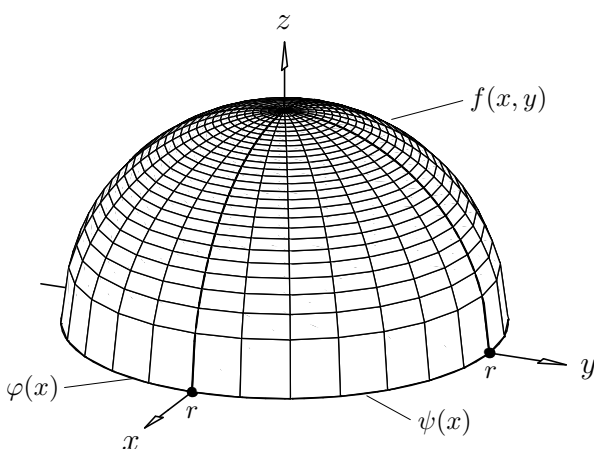


Abb. 10.9 In der Abbildung ist eine Halbkugel mit dem Radius r dargestellt. Die Grundfläche der Halbkugel entspricht dem x -einfachen Bereich B , dessen untere bzw. obere Begrenzung durch die Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ gegeben sind.

Sei B wie im vorhergehenden Beispiel definiert und f durch $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ gegeben (f beschreibt den oberen Teil der Kugeloberfläche). Offenbar ist f in B stetig, folglich gilt:

$$\begin{aligned}
V &= \iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\
&= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dy \right) dx = \frac{2}{3} r^3 \pi.
\end{aligned}$$

(Die Auswertung des letzten Integrals bleibt als Übungsaufgabe.)